

研究生系列教材

应用泛函分析原理



李广民
刘三阳 编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

内 容 简 介

本书根据作者近10年来为工科研究生讲授"应用泛函分析"课程的教学内容充实修改而成. 其主要内容有：实分析基础、距离空间、线性赋范空间与内积空间、线性泛函与线性算子、不动点定理与最佳逼近、线性算子谱论初步和抽象空间的微积分等. 在讲述上尽量通俗直观、深入浅出，对诸多抽象概念和定理提供了较多的例子. 习题难易适中并附有解答或提示.

本书适合工科研究生和数学专业本科生作为教材或教学参考书使用.

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析原理/李广民等编著.
—西安：西安电子科技大学出版社，2003.8
(研究生系列教材)
ISBN 7－5606－1265－2
Ⅰ. 应… Ⅱ. 李… Ⅲ. 泛函分析-研究生-教材 Ⅳ. O177
中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第048112号

责任编辑 夏大平
出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话 (029)8242885 8201467　　邮　编 710071
http://www.xduph.com　　E-mail：xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销 新华书店
印刷单位 西安文化彩印厂
版　　次 2003年8月第1版 2005年6月第2次印刷
开　　本 787毫米×1092毫米 1/16 印张15.125
字　　数 353千字
印　　数 4 001～8 000册
定　　价 20.00元
ISBN 7－5606－1265－2/O·0064(课)
XDUP 1536001－2

前　言

泛函分析是一门较新的数学分支，它综合运用分析、代数和几何的观点与方法，研究“函数的函数”、函数空间和它们之间的变换. 泛函分析不仅在核心数学中占有重要地位，而且其思想和方法在数学和工程科技的众多领域获得广泛而深刻的应用，成为科学研究的重要基础和工具. 著名数学家徐利治教授指出：“泛函分析是一门很优美的数学，它的高度概括性、应用的广泛性以及表述形式的简洁性，常能激发善教者和善学者的赞美和喜悦.”

本书是在作者近10年来为工科研究生讲授“应用泛函分析”课程的讲稿的基础上充实修改而成的. 其主要内容有：实分析基础、距离空间、线性赋范空间与内积空间、线性泛函与线性算子、不动点定理与最佳逼近、线性算子谱论初步、抽象空间的微积分等.

本书取材较广、适用面宽，除一般泛函分析的基本内容外，还补充了实变函数的基础知识和抽象空间的微积分，并对诸多概念和定理提供了较多的例子. 在讲述上力求深入浅出、循序渐进、通俗直观而又不失数学的严密性. 书中习题难易适中，并且基本上提供了解答或提示.

宋国乡教授在百忙之中仔细审阅了书稿；研究生院领导给予了热情支持和鼓励；西安电子科技大学出版社，特别是夏大平编辑，为本书的出版付出了辛勤的劳动；于沛、冯育强、周杰、王新辉、刘振华等同志进行了细心校对，在此一并表示感谢.

由于作者水平有限，尽管作者作了很大的努力，书中可能还存在这样那样的缺点或错误，恳请读者批评指正.

此书的出版得到了西安电子科技大学研究生教材建设基金的资助.

作者
2003年4月

目　录

第一章　实分析基础

1.1　集合及其运算

1.1.1　集合的概念

集合是数学研究的基本对象，是现代数学的基础．它已被广泛地应用于数学及其它学科的许多领域．一般认为，伟大数学家康托([德]G. Cantor)是集合论的创立者，按照他的定义是："一个集合是由我们思想中的或者有感知的一些确定的，可以分辨的对象所组成，并且被看成一个整体的任意一个集体"．定义中说到的"对象"称为集合的元素或元．

通常用大写字母表示集合，用小写字母表示集合的元素，如果 A 是一个集合，那么 $x\in A$表示 x 是 A 的一个元素，当 x不是 A 的元素时，用 $x\notin A$(或 $x\overline{\in} A$)表示．

表示集合的方法通常有两种：

（1）**列举法**．把集合中的元素全部列出来．例如：

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

表示全体自然数组成的集合；

$$A=\{1,3,5\}$$

表示由数 1，3，5 组成的集合．

（2）**特征表方法**．把集合中的元素的特征表示出来．例如

$$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$$

表示 $\mathbf{R}^2$ 中以原点为中心的单位圆；

$$C=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

表示实直线上的闭区间$[a,b]$．

设 A，B是两个集合，用 $A\subset B$表示 A 的每一元素也是集合 B 的一个元素．如果 $A\subset B$，则称 A是 B 的一个子集，即 A**包含**在 B 中；如果 $A\subset B$，且 $A\supset B$(把 $A\supset B$看作与 $B\subset A$等价)，称 A等于 B，记为 $A=B$；如果 $A\subset B$，且 $A\neq B$时，称 A为 B 的**真子集**．

集合包含$\supset$($\subset$)有两个简单的性质：

（1）$A\subset A$；

（2）如果 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$．

不含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$，例如：

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1，x，y\text{为实数}\}\neq\varnothing$$

设 A是一个给定的集合，考虑 A的子集

$$\{x \in A \mid x \neq x\}$$

这个集没有元素，是一个空集$\varnothing$，显然$\varnothing \subset A$. 若 $A \neq \varnothing$，则 A 至少有两个子集：A 和$\varnothing$. 如果 A 只有这样两个子集，则 A 只含有一个元素.

1.1.2 集合的运算

1. 集合的并集

设 A，B是两个确定的集合，则称由 A的元素与 B 的元素的全体构成的新集合为 A 与 B的并集，记为 $A \cup B$，即有

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}$$

设$\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$为某一族确定的集合($\Lambda$为某指标集)，则称由各个 A_λ 的元素的全体构成的新集合为它们的并集，记为$\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$，即有

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid x \in \text{某个} A_{\lambda_0}，\lambda_0 \in \Lambda\}$$

2. 集合的交集

设 A，B是两个确定的集合，则称由 A，B的公共元素组成的新集合为 A 与 B 的交集，记为 $A \cap B$，即有

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$$

由所有 $A_\lambda(\lambda \in \Lambda)$的公共元素组成之集称为它们的交集，记为$\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$，即

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid x \in A_\lambda，\lambda \in \Lambda\}$$

3. 集合并、交集的运算性质

关于集合的并与交，有以下运算性质.

定理 1.1.1(分配律) 设 E是一个集合，$\{A_\lambda，\lambda \in \Lambda\}$是一族集合，则有

(1) $E \cap (\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (E \cap A_\lambda)$ (1.1-1)

(2) $E \cup (\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} (E \cup A_\lambda)$ (1.1-2)

证 仅证(1)，(2)同理可证. $\forall x \in E \cap (\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$，有 $x \in E$，$x \in \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$，即$\exists \lambda_0 \in \Lambda$，使 $x \in A_{\lambda_0}$，从而 $x \in E \cap A_{\lambda_0}$，故 $x \in \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (E \cap A_\lambda)$，即

$$E \cap (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (E \cap A_\lambda)$$

反过来，$\forall x \in \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (E \cap A_\lambda)$，则$\exists \lambda_0 \in \Lambda$，使 $x \in E \cap A_{\lambda_0}$，即 $x \in E$ 且 $x \in A_{\lambda_0} \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$，故有 $x \in E \cap (\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$，即

$$E \cap (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \supset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (E \cap A_\lambda)$$ □

4. 差集与余集

设 A，B是两个确定的集合，定义 A与 B 的**差集** $A-B$(也记为 $A \setminus B$)为属于 A 而不属于 B的元素组成的集合，即

$$A - B = \{x \mid x \in A，x \notin B\}$$

特别地，若 $B \subset A$，则称 $A-B$ 为 B 关于 A 的**余集**，记为 B_A^C，即

$$B_A^C = A - B \qquad B \subset A$$

在同一问题中，若考虑的某集合是某一大集合 X的子集，则称 X为基本集合，或称为空间. 例如，$\mathbf{R}^1=\{x|x$为实数$\}$，$\mathbf{R}^2=\{(x,y)|x,y$为实数$\}$，集合 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，$A=\{1,3,5\}$都是 $\mathbf{R}^1$ 的子集，$B=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$是 $\mathbf{R}^2$ 的子集. $\mathbf{R}^1$，$\mathbf{R}^2$ 都是基本集合(或称为空间).

集合 B关于基本集合 X的余集，简称为余集，记为 B^C，即

$$B^C=X-B \qquad B\subset X$$

5. 并、交集的余集的运算规则

关于并、交集的余集有以下的结论.

定理 1.1.2(De. Morgan 公式) 设$\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是一族确定的集合($A_\lambda\subset X$)，则有

(1) $$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^C=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C \tag{1.1-3}$$

(2) $$(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^C=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C \tag{1.1-4}$$

这两个公式称为 De. Morgan 公式.

证 仅证(1)，公式(2)同理可证. $\forall x\in(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^C$，即 $x\in X$，$x\notin\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，从而$\forall\lambda\in\Lambda$，$x\notin A_\lambda$. 由 $x\in X$知，$x\in A_\lambda^C(\forall\lambda\in\Lambda)$，所以 $x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C$.

反过来，设 $x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C$，则$\forall\lambda\in\Lambda$，有 $x\in A_\lambda^C$. 由 $x\in X$，$x\notin A_\lambda(\forall\lambda\in\Lambda)$，从而 $x\notin\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，所以 $x\in(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^C$. 故有

$$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^C=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C$$ □

1.1.3 可数集与不可数集

集合按元素的“个数”可分为两类，即有限集与无限集. 若一个集合的元素的个数是有限的，则称为有限集，否则称为无限集. 有限集比较简单，这里主要讨论无限集.

定义 1.1.1(映射) (1) 设 A，B是两个非空集合，若存在法则 f，对每一 $x\in A$，在 B有一个确定的元素 y与之对应，则称 f是定义在 A上而在 B中取值的映射，记为 f：$A\to B$，并将 x与 y的关系写成 $y=f(x)$. 称 A为 f的定义域，$f(A)=\{f(x)\in B|x\in A\}$为 f的值域.

(2) 设 f：$A\to B$，满足：

① $B=f(A)$，

② x_1，$x_2\in A$，$x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，

则称 f是**一一映射**.

设 f是 A到 B的一一映射，则对每个 $y\in B$有唯一的 $x\in A$使 $f(x)=y$，定义 $g(y)=x$(当 $f(x)=y$时)，则 g是 B到 A的一一映射，我们称 g是 f的**逆映射**，记为 f^{-1}. 容易得到：g是 f的逆映射，则当且仅当 $gf=I_A$，$fg=I_B$.

定义 1.1.2(对等) 设 A，B是两个确定的集合，若存在 f：$A\to B$是一一映射，则称 A与 B存在**一一对应**，或称它们相互对等，记为 $A\sim B$

显见对等关系有以下性质.

(1) **自反性**：$A\sim A$；

(2) **对称性**：若 $A\sim B$，则 $B\sim A$；

(3) **传递性**：若 $A\sim B$, $B\sim C$, 则 $A\sim C$.

由对等的意义易知，对有限集而言，"$A\sim B$"与"A, B所含元素个数相同"是同一概念. 对于无限集，有以下的定义.

定义 1.1.3(可列集) 设 A 是无限集，$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$是自然数集，若 $A\sim\mathbf{N}$，则称 A 为**可列集**(也称**可数集**)，否则称 A 为**不可列集**.

注 1.1.1 A 是可列集是指 A 的一切元素可以用自然数编号，使 A 写成 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$的形式. 例如：

全体偶数集$\{0,2,4,\cdots,2k,\cdots\}$是可列集；

全体整数集$\{0,-1,1,-2,2,\cdots,-n,n,\cdots\}$是可列集.

关于可列集的运算有以下的结论.

定理 1.1.3(可列集的运算性质)

(1) 有限个可列集的并集是可列集；

(2) 可列个可列集的并集是可列集.

证 (1) 设 E_1, E_2, $\cdots$, E_N 是 N 个可列集，记 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{N}E_i$. 分别把 E_1, E_2, $\cdots$, E_N 的元素列出有

$$E_1: x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \cdots, x_i^{(1)}, \cdots$$

$$E_2: x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \cdots, x_i^{(2)}, \cdots$$

$$\cdots$$

$$E_N: x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, x_3^{(N)}, \cdots, x_i^{(N)}, \cdots$$

E的元素可排列为

$$E: x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_1^{(N)}, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_2^{(N)}, \cdots$$

则 E 为可列集.

(2) 设 E_1, E_2, $\cdots$, E_n, $\cdots$是一列可列集，$E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$.

$$E_1: x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \cdots, x_i^{(1)}, \cdots$$

$$E_2: x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \cdots, x_i^{(2)}, \cdots$$

$$E_3: x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \cdots, x_i^{(3)}, \cdots$$

$$\cdots$$

$$E_n: x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \cdots, x_i^{(n)}, \cdots$$

$$\cdots$$

E的元素可排列为(依箭头方向排列)

$$E: x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_3^{(1)}, x_2^{(2)}, x_1^{(3)}, \cdots$$

则 E 为可列集. □

推论 1.1.1 全体有理数之集 $\mathbf{Q}$ 是可列集.

证 令 $\mathbf{Q}_+=\{x\in\mathbf{Q}\mid x>0\}$，$\mathbf{Q}_-=\{x\in\mathbf{Q}\mid x<0\}$，记 $E_n=\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\cdots,\frac{i}{n},\cdots\right\}$，$n=1,2,3,\cdots$. 显见 E_n 是可列集，则 $\mathbf{Q}_+=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 是可列集. 同理可证 $\mathbf{Q}_-$也是可列集. 把 $\mathbf{Q}_+$，$\mathbf{Q}_-$的元素分别排列为

$$\mathbf{Q}_+ : x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_i,\ \cdots$$

$$\mathbf{Q}_- : y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_i,\ \cdots$$

则 **Q** 的元素可排列为

$$\mathbf{Q}: 0,\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \cdots,\ x_i,\ y_i,\ \cdots$$

则 **Q** 是可列集. □

在介绍了实数的完备性理论之后，可以证明：[0, 1]中的全体实数构成的集合是不可列集.

1.2 实数的完备性

1.2.1 有理数及其稠密性

所谓有理数，是指形如$\frac{n}{m}$（m为正整数，n为整数，并且 m与 n互质）的数.

可以证明：每个有理数$\frac{n}{m}$是一个无限循环小数(有限循环小数可以看作以 0 为循环节的无限循环小数). 因此，每一个无限不循环小数必不是有理数，我们称它为无理数. 通常由 **Q** 表示有理数集，即

$$\mathbf{Q} = \{ x \mid x \text{为有理数} \}$$

有理数集的性质：

(1) 任何有理数可以由整数 1 经过有限次的有理运算(即加、减、乘、除)而得到.

(2) 任何两个有理数经过有理运算后，仍得到有理数，也就是说，有理数集 **Q** 对于四则运算封闭.

(3) 有理数集 **Q** 是可列集，即 **Q** 的元素“个数不多”，是最小的“无限数集”.

除以上性质外，还有所谓的**稠密性**，即：

(4) 任何两个有理数 $q_1 = \frac{n_1}{m_1}$，$q_2 = \frac{n_2}{m_2}$之间，还存在有理数 $q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2}\right)$.

由此可得：任何两个有理数之间有无穷多个有理数；任何开区间(a, b)内含有无穷多个有理数. 这就体现了有理数的稠密性.

关于有理数，我们应注意以下两点：

(1) **不是有理数的数大量存在**. 例如：单位正方形对角线的长度$\sqrt{2}$就不是有理数，π、e 也不是有理数；再如数 0.1010010001000010…就不是有理数，我们称它们为无理数. 我们说无理数大量存在，事实上，对实数而言，则有

$$\text{有理数} + \text{无理数} = \text{无理数}$$

便知无理数的“个数”不比有理数少.

(2) **有理数集不具有完备性**. 也就是说，在有理数集合 **Q** 中，极限运算是不通行的.

例如：有理数列 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\in\mathbf{Q}$，在实数范围内有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}\in\mathbf{R}^1\qquad \mathbf{R}^1\ \text{表示实数集}$$

但 $\mathrm{e}\notin\mathbf{Q}$. 即在有理数范围内$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$不存在.

以上两点说明：尽管有理数在实轴上稠密，但它没有填满实轴，还有大量的空隙存在.

1.2.2 实数及其完备性

一切无限小数统称实数，其中，循环小数为有理数，不循环小数为无理数. 常用 $\mathbf{R}^1$ 表示全体实数集合. 我们知道，自然数在数直线上是很稀的. 有理数在数直线上处处稠密，但有空隙存在. 全体实数和数直线上的点一一对应，所以这种空隙不存在了. 实数系的这种“没有空隙”的性质，就是实数的完备性(或连续性). 下面来讨论刻画实数完备性的几个等价命题.

1. 确界的存在性

定义 1.2.1(有界集) 设 $A\subset\mathbf{R}^1$ 是非空数集.

(1) 如果存在 $M\in\mathbf{R}^1$，使 $\forall x\in A$，有 $x\leqslant M$，则称 M 为数集 A 的一个上界；

(2) 如果存在 $m\in\mathbf{R}^1$，使 $\forall x\in A$，有 $x\geqslant m$，则称 m 为数集 A 的一个下界；

(3) 如果数集 A 既有上界又有下界，则称 A 为有界数集.

注 1.2.1 数集有界的等价定义：如果存在 $M>0$，使 $\forall x\in A$，有 $|x|\leqslant M$，则称 A 为有界数集.

定义 1.2.2(确界) 设 $A\subset\mathbf{R}^1$ 是非空数集，若存在这样一个实数 β，满足：

(1) $\forall x\in A$，有 $x\leqslant\beta$，

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in A$，使 $x_0>\beta-\varepsilon$，

则 β 叫 A 的**上确界**(或**最小上界**)，记为

$$\beta=\sup A\quad\text{或}\quad\beta=\sup_{x\in A}\{x\}$$

上面第一条件意味着 β 是数集 A 的一个上界，而第二条件显示出凡小于 β 的任何实数都不是 A 的上界. 因此，β 也叫做数集 A 的最小上界.

不难证明：若 β 是 A 的上确界，则存在 $x_n\in A$，使$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$.

同样，给定数集 $A\subset\mathbf{R}^1$，若存在 $\alpha\in\mathbf{R}^1$，满足：

(1) $\forall x\in A$，有 $x\geqslant\alpha$，

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in A$，使 $x_0<\alpha+\varepsilon$，

则称 α 为数集 A 的**下确界**(或**最大下界**)，记为

$$\alpha=\inf A\quad\text{或}\quad\alpha=\inf_{x\in A}f(x)$$

实数的完备性质(即没有空隙)，在理论上十分重要. 为了在应用这些性质时更加确切，可以把它表述成以下的公理.

定理 1.2.1(确界存在公理) 任何有上(下)界的数集必存在上(下)确界.

注 1.2.2 并不是任何数集都有上、下确界. 对于有限数集而言，上、下确界必存在，分别是该数集的最大、最小数. 对于无限数集来讲，上、下确界未必存在，例如，自然数集

$\mathbf{N}=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$有下确界 0，而无上确界.

注 1.2.3 无限数集 A 即使它有上确界 β 或下确界 α，然而 β 或 α 可以属于 A，也可以不属于 A. 例如：$A=(0, 1]$，

$$\alpha=\inf A=0 \notin A, \quad \beta=\sup A=1 \in A$$

有了确界存在公理，则可以证明数列极限存在性定理之一：单调有界准则.

定理 1.2.2(单调有界准则) 单调有界数列必有极限.

证 仅对单调增加的有上界数列予以证明. 设$\{x_n\}$是单调增加的有界数列，即

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$$

且 $\exists M \in \mathbf{R}^1$，$\forall n \in \mathbf{N}$，有 $x_n \leqslant M$.

考虑数集 $A=\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$，$A$ 是非空的有上界的数集，由定理 1.2.1 知 A 存在上确界 $\beta=\sup A$.

$\forall \varepsilon>0$，由上确界的定义知 $\exists x_N$，使得

$$\beta-\varepsilon<x_N$$

当 $n>N$ 时，由$\{x_n\}$单调增加得

$$\beta-\varepsilon<x_N \leqslant x_n \leqslant \beta<\beta+\varepsilon$$

即

$$|x_n-\beta|<\varepsilon \qquad n>N$$

这就是

$$\lim_{n \to \infty} x_n=\beta$$

□

2. 区间套定理

定理 1.2.3(区间套定理) 设闭区间列$\{[a_n, b_n]\}$满足：

(1) $\forall n, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

(2) $\lim\limits_{n \to \infty}(b_n-a_n)=0$

则有$\lim\limits_{n \to \infty} a_n=c=\lim\limits_{n \to \infty} b_n$，且 c 是所有区间的唯一公共点，即

$$\{c\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$$

证 由定理条件(1)知$\{a_n\}$是单调增加且有上界 b_1 的数列，$\{b_n\}$是单调减少且有下界 a_1 的数列. 根据定理 1.2.2 知

$$\lim_{n \to \infty} a_n=a=\sup\{a_n\}$$

$$\lim_{n \to \infty} b_n=b=\inf\{b_n\}$$

且

$$a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$$

再由定理条件(2)知

$$0 \leqslant b-a \leqslant \lim_{n \to \infty}(b_n-a_n)=0$$

记 $c=a=b$，则有

$$\lim_{n \to \infty} a_n=c=\lim_{n \to \infty} b_n$$

如果存在 c_1 满足

$$a_n \leqslant c_1 \leqslant b_n$$

则

$$0 \leqslant | c_1 - c | \leqslant b_n - a_n \to 0 \qquad n \to \infty$$

即 $c_1 = c$. □

注 1.2.4 在区间套定理中，如果将闭区间改为开区间，或将条件(1)、(2)中任一条去掉，结论将不再成立.

例 1.2.1 证明[0, 1]中的全体实数构成的集合是不可数集.

证 用反证法. 如果[0, 1]中的全体实数构成之集是可列的，则它们可以排列为

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \tag{1.2-1}$$

使[0, 1]中的数都在数列(1.2-1)式中出现. 将[0, 1]分成三等分：$\left[0, \frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3}, 1\right]$，则这三个小区间中至少有一个不含 x_1，记此小区间为$[a_1, b_1]$. 再把$[a_1, b_1]$三等分：$[a_1, c_1]$，$[c_1, d_1]$，$[d_1, b_1]$，它们中至少有一个小区间不含 x_2，记为$[a_2, b_2]$，依次可得闭区间列$[a_n, b_n]$，其中不含 x_n，满足：

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{3^n} \to 0 \qquad n \to \infty$$

根据区间套定理知，存在唯一 $c \in [0, 1]$，满足 $c \in [a_n, b_n]$，$n = 1, 2, 3, \cdots$. 按照$[a_n, b_n]$的取法，$x_n \notin [a_n, b_n]$，故 $c \neq x_n$，从而 c 在数列(1.2-1)式中不出现，从而矛盾. □

3. 致密性定理

定理 1.2.2 说明：单调有界数列必收敛，这是一个非常重要的极限存在准则. 如果数列有界而不单调，则数列的敛散性不能用定理 1.2.2 来判别，此时数列可能收敛也可能发散. 但有界数列无论收敛与否，它都有一个非常重要的性质，我们称之为“致密性定理”，它是由德国数学家魏尔斯特拉斯(Weierstrass)首先发现的，也称为 Weierstrass 定理. 为了介绍这一定理，先给出子列的概念.

在数列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

中，保持原来顺序自左向右自由选取无穷多项，如

$$x_2, x_5, \cdots, x_{50}, \cdots$$

这种数列称为$\{x_n\}$的**子列**. 为方便，用另一种下标来表示它. 在选出的子列中，记第一项为 x_{n_1}，第二项为 x_{n_2}，…，第 k 项为 x_{n_k}，于是$\{x_n\}$的子列就表示成

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

或$\{x_{n_k}\}$，k 表示 x_{n_k} 是子列$\{x_{n_k}\}$中的第 k 项，n_k 表示 x_{n_k} 在原数列$\{x_n\}$中是第 n_k 项. 对每一个 k，$n_k \geqslant k$，且 $n_{k+1} > n_k$. 子列$\{x_{n_k}\}$中的下标是 k 而不是 n_k. $\{x_{n_k}\}$收敛于 a 是指：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists K > 0$，当 $k > K$ 时，有

$$| x_{n_k} - a | < \varepsilon$$

记为

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a$$

定理 1.2.4(致密性定理) 任一有界数列必有收敛子列.

证 设$\{x_n\}$是一有界数列，即存在 $a, b\in \mathbf{R}^1$，使 $a\leqslant x_n\leqslant b$. 把闭区间$[a, b]$二等分，至少有一个小区间含有$\{x_n\}$中的无穷多个数，把这个小区间记为$[a_1, b_1]$. 如果这两个小区间都含有$\{x_n\}$的无限多个数，则任取其一作为$[a_1, b_1]$. 再将$[a_1, b_1]$二等分，记含$\{x_n\}$中无穷多个数的小区间为$[a_2, b_2]$. 把这种分割无限地进行下去，便得到一列闭区间$[a_n, b_n]$，$n=1, 2, \cdots$，满足：

(1) $[a_n, b_n]$中含有$\{x_n\}$中的无穷多个数；

(2) $[a_{n+1}, b_{n+1}]\subset[a_n, b_n]$；

(3) $b_n-a_n=\dfrac{1}{2^n}(b-a)\to 0\quad(n\to\infty)$.

由区间套定理，必有唯一点 $c\in[a, b]$，使

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c=\lim_{n\to\infty} b_n \quad 且 \quad \{c\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$$

由于$[a_1, b_1]$中含有$\{x_n\}$中的无限多个数，故可在$[a_1, b_1]$中任取$\{x_n\}$的一项，记为x_{n_1}，它是$\{x_n\}$的第 n_1 项. $[a_2, b_2]$中含有$\{x_n\}$的无限多项，则$[a_2, b_2]$必含有$\{x_n\}$第 n_1 项以后的无限多项，任意取一项，记为 x_{n_2} $(n_1<n_2)$，继续在$[a_k, b_k]$中取 x_{n_k} $(n_1<n_2<\cdots<n_k)$. $\{x_{n_k}\}$就是$\{x_n\}$的一个子列，且 $a_k\leqslant x_{n_k}\leqslant b_k$. 令 $k\to\infty$，可得 $x_{n_k}\to c$. □

4. 柯西收敛原理

单调有界准则给出了数列极限存在的一个非常重要的判别法，单调有界只是数列极限存在的充分条件而不是必要条件. 关于数列极限存在的充分必要条件的寻求，必须从数列自身的性质出发. 经过许多人的不断努力，终由数学家柯西([法]Cauchy)给出了非常漂亮的结果，称之为柯西收敛原理. 下面先给出“基本列”的概念.

定义 1.2.3(基本列) 设$\{x_n\}$为一数列，如果 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当 $n, m>N$ 时，有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$成立，则称$\{x_n\}$为一基本列，或柯西列.

定理 1.2.5(柯西收敛原理) $\{x_n\}$是收敛数列$\Longleftrightarrow\{x_n\}$是基本列.

证 $\Rightarrow$ 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当 $n, m>N$时，有

$$|x_n-a|<\frac{1}{2}\varepsilon, \qquad |x_m-a|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

故有

$$|x_n-x_m|\leqslant|x_n-a|+|x_m-a|<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

这表明$\{x_n\}$是基本数列.

$\Leftarrow$ 首先证明$\{x_n\}$是有界数列. 取定 $\varepsilon=1$，则存在 N，当 $m=N$，$n>N$时，有

$$|x_n-x_m|=|x_n-x_N|<1$$

即当 $n>N$时，有

$$|x_n|\leqslant|x_n-x_N|+|x_N|<|x_N|+1$$

记

$$M=\max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{N-1}|, |x_N|+1\}$$

则有 $|x_n|<M$，即$\{x_n\}$有界.

其次证$\{x_n\}$收敛. 由致密性定理知数列$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$，即 $\forall\ \varepsilon>$

0，$\exists K>0$，当 $k>K$ 时，有 $|x_{n_k}-a|<\frac{1}{2}\varepsilon$. 由$\{x_n\}$是基本列知存在 N，当 $k\geqslant N$(此时 $n_k\geqslant k$)时，有

$$|x_{n_k}-x_k|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

取 $N^*=\max(N, K)$，则当 $k\geqslant N^*$ 时，有

$$|x_k-a|\leqslant|x_k-x_{n_k}|+|x_{n_k}-a|<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$. □

5. 有限覆盖定理

设一区间集 E(即 E 的元素为区间)及某一区间 I，若 $\forall x\in I$，则 $\exists$ 区间 $\Delta\in E$，使 $x\in\Delta$. 则称 E 覆盖 I. 例如：

$$\left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right), \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right), \cdots \text{及}[1, 2]$$

覆盖了区间$[0, 2]$；区间集

$$E=\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid x\in[0, 1], \varepsilon>0\}$$

覆盖了区间$[0, 1]$.

定理 1.2.6(有限覆盖定理) 若由开区间所组成的区间集 E 覆盖一个闭区间$[a, b]$，则总可以从 E 选出有限个开区间，使这些开区间也覆盖$[a, b]$.

证 用反证法. 设$[a, b]$不能被 E 中有限个开区间所覆盖，将$[a, b]$等分成两个子区间，则至少有一个子区间不能被 E 中有限个开区间所覆盖，记这个子区间为$[a_1, b_1]$. 再等分$[a_1, b_1]$，记不能被 E 中有限个开区间所覆盖的子区间为$[a_2, b_2]$. 如此继续分割下去，便可以得到一列闭区间$[a_n, b_n]$. 它们满足：

(1) 每一个$[a_n, b_n]$不能被 E 中的有限个开区间所覆盖；

(2) $[a_{n+1}, b_{n+1}]\subset[a_n, b_n]$，$n=1, 2, \cdots$；

(3) $b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)\to 0$，$n\to\infty$.

由条件(2)、(3)，根据区间套定理，则存在惟一的 $c\in[a, b]$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 再由覆盖的定义知，在 E 中存在一个开区间$(\alpha, \beta)\in E$，使

$$c\in(\alpha, \beta) \quad \text{或} \quad \alpha<c<\beta$$

由数列极限的性质知，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有

$$\alpha<a_n<b_n<\beta$$

即当 $n>N$ 时，$[a_n, b_n]\subset(\alpha, \beta)$，这就是说，可以用 E 中的一个开区间覆盖$[a_n, b_n]$，这与条件(1)相矛盾. □

注 1.2.5 在定理 1.2.6 的条件中，若 E 中的区间不是开区间或$[a, b]$不是闭区间，则定理的结论不一定成立. 例如，就不能从区间集

$$\left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right), \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right), \cdots \text{及}[1, 2]$$

中选出有限个区间来覆盖闭区间$[0, 2]$.

注 1.2.6 上面我们介绍了刻画实数完备性的六个定理. 证明过程是由定理 1.2.1 推

出定理 1.2.2，依此类推，推得定理 1.2.6，还可以从定理 1.2.6 出发而推出定理 1.2.2(即单调有界准则)，从定理 1.2.2 又可以推出定理 1.2.1(即确界存在公理)．由此可见，以上六个定理是等价的，它们都刻画了实数完备性的实质，也称它们为实数完备性的等价命题．

1.3 实直线上的开集、闭集、连续函数

1.3.1 开集与闭集

设 x_0 是一实数，$\delta>0$，称开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$是 x_0 点的 δ 邻域，记为 $O(x_0, \delta)$．

定义 1.3.1 (1) 设 A 是一数集，$x_0\in A$，且存在 $O(x_0, \delta)\subset A$，则称 x_0 为 A 的一个**内点**；

(2) 如果 A 的每一点都是 A 的内点，则称 A 为**开集**．

由开集的定义易知，开区间(a, b)是开集，$\varnothing$ 及 $\mathbf{R}^1$ 是开集．

关于开集的运算有以下定理。

定理 1.3.1(开集的运算性质)

(1) 任意多个开集的并集是开集；

(2) 有限多个开集的交集是开集．

证 (1) 设 $G=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$，$A_\alpha$ 是开集(I 为指标集)．$\forall x_0\in G$，则 $\exists\alpha_0\in I$，使 $x_0\in A_{\alpha_0}$，由于 A_{α_0} 为开集，故存在 $O(x_0, \delta)\subset A_{\alpha_0}\subset\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$，即 $O(x_0, \delta)\subset G$，所以 G 是开集．

(2) 设 $G=\bigcap_{k=1}^{N}A_k$，A_k 为开集．

若 $G=\varnothing$，自然为开集；若 $G\neq\varnothing$，$\forall x_0\in G$，则对每一个 $k=1, 2, \cdots, N$，有 $x_0\in A_k$．由 A_k 为开集，故存在 $O(x_0, \delta_k)\subset A_k(\delta_k>0)$．取 $\delta=\min(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_N)>0$，则 $O(x_0, \delta)\subset A_k(k=1, 2, \cdots, N)$，即 $O(x_0, \delta)\subset G$，所以 G 为开集． □

下面考虑开集的构造．

从开集的定义及开集的运算性质(定理 1.3.1)可以看出，开区间是开集，任意多个开区间的并集是开集，有限多个开区间的交集是开集，由此可推测开集的构造可能很复杂．其实不然，开集的构造十分简单，只是 $\mathbf{R}^1$ 上有限个或至多可列个互不相交的开区间之并．把它写成如下的定理．

定理 1.3.2(开集的构造) 实直线上的任一非空开集 G 可以表示为至多可列个互不相交开区间之并，即

$$G=\bigcup_{i\in I}(\alpha_i, \beta_i)$$

这里 I 是有限或至多可列的指标集．这里的(α_i, β_i)(α_i 可以是$-\infty$，β_i 可以是$+\infty$)称为开集 G 的**构成区间**．

证略． □

定义 1.3.2(闭集) 若数集 B 的余集 $B^C=\mathbf{R}^1-B$ 是开集，则称 B 为**闭集**．

显然，闭区间是闭集；$\mathbf{R}^1$ 是闭集；$\varnothing$ 是闭集；有限集是闭集，全体整数集为闭集．

关于闭集并与交，有以下定理.

定理 1.3.3(闭集的运算性质)

(1) 任意多闭集之交是闭集；

(2) 有限个闭集之并是闭集.

证 (1) 设 $F=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$，$A_\alpha$ 是闭集，则

$$F^C=(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^C=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^C$$

因 A_α^C 是开集，由定理 1.3.1 知 F^C 是开集，所以 F 是闭集.

(2) 设 $F=\bigcup_{i=1}^{N}A_i$，$A_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为闭集，则

$$F^C=(\bigcup_{i=1}^{N}A_i)^C=\bigcap_{i=1}^{N}A_i^C$$

因 A_i^C 为开集，由定理 1.3.1 知 F^C 是开集，故 F 是闭集. □

定义 1.3.3(极限点) 设 $x_0\in\mathbf{R}^1$，$A\subset\mathbf{R}^1(A\neq\varnothing)$，如果对任何 $\delta>0$，$O(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中至少存在一个属于 A 而不等于 x_0 的点 x，则称 x_0 为数集 A 的**极限点**(或称为**聚点**).

注 1.3.1 极限点有如下的等价的定义：若 x_0 的任何邻域 $O(x_0,\delta)$ 中，含有 A 的无限多个点，称 x_0 为 A 的极限点，其几何解释为：如果 x_0 是 A 的极限点，则必有 A 的无限多个点"密集"在 x_0 点附近.

定理 1.3.4(极限点的等价条件) 设 $A\subset\mathbf{R}^1(A\neq\varnothing)$，则 x_0 是 A 的极限点$\Longleftrightarrow$存在数列$\{x_n\}$，$x_n\in A$，$x_n\neq x_0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

证 $\Rightarrow$ 设 x_0 为 A 的极限点，对每个自然数 n，取 $\delta_n=1/n$，由定义知，在 $O(x_0,\delta_n)$ 中存在 $x_n\in A$，$x_n\neq x_0$，即$|x_n-x_0|<1/n$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

$\Leftarrow$ $\forall\delta>0$，考虑 $O(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$，因为存在 $x_n\in A$，$x_n\neq x_0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，故存在 N，当 $n>N$ 时，有$|x_n-x_0|<\delta$，即 $x_n\in O(x_0,\delta)(x_n\neq x_0)$，所以 x_0 是 A 的极限点. □

例 1.3.1 设 $A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$，显见 0 是 A 的极限点.

定理 1.3.5(闭集的充要条件) 设 $F\subset\mathbf{R}^1$，则 F 是闭集$\Longleftrightarrow F$ 的所有极限点属于 F.

证 $\Rightarrow$ 欲证 F 的所有极限点属于 F，只要证 $F^C=\mathbf{R}^1-F$ 没有 F 的极限点. $\forall x\in F^C$，由于 F^C 为开集，故 $\exists\delta>0$，使 $O(x,\delta)\subset F^C$，即 $O(x,\delta)$ 中没有 F 的点，更没有属于 F 而不等于 x 的点，所以 x 不是 F 的极限点，即 F^C 中不含 F 的极限点.

$\Leftarrow$ 欲证 F 为闭集，只须证 F^C 是开集. $\forall x\in F^C$，由 $x\in F$ 及 F 包含了 F 的所有的极限点，故 x 不是 F 的极限点. 所以存在某个 $\delta>0$，使 $O(x,\delta)$ 中不含 F 的点，从而 $O(x,\delta)\subset F^C$，即 F^C 为开集. □.

注 1.3.2 上述关于闭集的充要条件，有些书上应用它作为闭集的定义. 记 $A'=\{x|x$ 是 A 的极限点$\}$，称 A' 为 A 的**导集**，$\overline{A}=A\cup A'$，称 $\overline{A}$ 是 A 的**闭包**. 则由定理 1.3.5 有

$$A\text{是闭集}\Longleftrightarrow A'\subset A\Longleftrightarrow A=\overline{A}$$

定理 1.3.6 设 F 是闭集，G 为开集，则

(1) $G-F$ 是开集；

(2) $F-G$是闭集.

证 (1) 由 $G-F=G\cap F^C$ 及定理1.3.1便知结论成立. 结论(2)同理可证. □

例 1.3.2(康托(Cantor)三分集) 将区间[0, 1]三等分, 挖去中间的开区间$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; 将剩余的两个闭区间$\left[0, \frac{1}{3}\right]$与$\left[\frac{2}{3}, 1\right]$再分别三等分, 挖去各自中间的开区间$\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$与$\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$; 再将剩余的四个闭区间分别三等分, 再挖各自中间的开区间, ……这样继续进行下去, 由区间[0, 1]中剩余的点所构成的集合称为Cantor三分集, 简称为Cantor集 K.

康托集有以下的性质.

(1) 康托集 K是一个闭集. 事实上, 挖去的集合为

$$G_0=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right)\cup\left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right)$$
$$\cup\left(\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}\right)\cup\left(\frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3}\right)\cup\left(\frac{19}{3^3}, \frac{20}{3^3}\right)\cup\left(\frac{25}{3^3}, \frac{26}{3^3}\right)\cup\cdots$$

显然 G_0 是一开集, 因此, 康托集 $K=[0, 1]-G_0$ 是闭集.

(2) K是不可数集. 事实上, 如果 K是可数的, 则 K中的全体数可以排成一列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

那么, 在区间$\left[0, \frac{1}{3}\right]$与$\left[\frac{2}{3}, 1\right]$中总有一个不含 x_1, 记它为$[a_1, b_1]$. 将$[a_1, b_1]$三等分, 则其左、右两个闭区间中至少有一个不含 x_2, 把它记为$[a_2, b_2]$. ……依此继续下去, 可得一闭区间列$[a_n, b_n]$, 满足:

① $\quad [a_{n+1}, b_{n+1}]\subset[a_n, b_n]$

② $\quad b_n-a_n=\frac{1}{3^n}\to 0 \qquad n\to\infty$

③ $\quad x_n\in[a_n, b_n] \qquad n=1, 2, 3, \cdots$

由区间套定理知, 存在唯一点 $c\in[a_n, b_n]$, $n=1, 2, \cdots$, 但 $c\neq x_n$, $n=1, 2, \cdots$, 且 $c=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 故 c是 K 的极限点. 再由 K是闭集, 所以 $c\in K$, 这与 K是可列集相矛盾.

1.3.2 点集上的连续函数

我们知道, 闭区间上连续函数具有许多重要性质, 如有界性、最小值与最大值、介值性、一致连续性. 除介值性外, 这些性质可推广到有界闭集上的连续函数.

定义 1.3.4(连续) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$, $f(x)$是定义于 E的函数, $x_0\in E$. 如果 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $x\in E$, 且$|x-x_0|<\delta$时, 有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 则称 $f(x)$在 x_0 点**连续**. 若 $f(x)$在 E上的每一点都连续, 则称 $f(x)$在 **E上连续.**

不难证明, $f(x)$在 $x_0\in E$连续有如下的等价定义: 如果对任何$\{x_n\}$, $x_n\in E$, $x_0\in E$, 当 $x_n\to x_0(n\to\infty)$时, 都有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0) \tag{1.3-1}$$

注 1.3.3 要使 $f(x)$在 x_0 点连续, $f(x)$必须在 x_0 点有定义. 如果 x_0 是 E的孤立点

（即 $x_0\in E$，但不是 E 的极限点），则 $f(x)$ 必在 x_0 点连续．这是因为不论如何取 $\varepsilon>0$，总可以找到 $\delta>0$，使满足 $|x-x_0|<\delta$，$x\in E$ 的点只有 $x=x_0$，此时 $|f(x)-f(x_0)|=0<\varepsilon$

例 1.3.3 在集合 $E=\{1,2,3,4\}$ 上定义函数 f 如下：

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	2	6	8

则 $f(x)$ 是 E 上的连续函数．

定理 1.3.7(最值定理) 设 F 是实直线上的有界闭集，$f(x)$ 是定义于 F 上的连续函数，则 $f(x)$ 在 F 上取得最大值与最小值．

证 仅证 $f(x)$ 在 F 上取得最大值，取得最小值同法可证．

首先证明 $f(x)$ 在 F 上有上界．用反证法：若 $f(x)$ 在 F 上无上界，则存在 $x_v\in F$，使 $f(x_v)\geqslant n$，即 $\lim\limits_{v\to\infty}f(x_v)=+\infty$．由于 F 是有界闭集，因此 $\{x_v\}$ 有收敛于 F 的子列 $\{x_{v_k}\}$．可设 $\lim\limits_{v\to\infty}x_{v_k}=x_0\in F$，故 $f(x_0)$ 有定义．又由于 $f(x)$ 在 x_0 点连续，应有

$$f(x_0)=\lim_{k\to\infty}f(x_{v_k})=+\infty$$

这是一个矛盾，所以 $f(x)$ 在 F 上有上界．

再证 $f(x)$ 在 F 上取得最大值．设 $M_0=\sup\limits_{x\in F}f(x)$，由上确界定义可知，存在 $\{x_v\}\subset F$，使 $f(x_v)\to M_0(n\to\infty)$．如果 $\{x_v\}$ 中有 x_{v_0} 使 $f(x_{v_0})=M_0$，则定理结论成立；否则，则存在 $\{x_v\}$ 的子列 $\{x_{v_k}\}$，使 $x_{v_k}\to x_0\in F$，且 $f(x_{v_k})\to f(x_0)$，另由 $f(x_v)\to M_0$，知 $f(x_0)=M_0$．

□

在连续函数的应用中，经常用到一个非常重要的概念，叫做一致连续，下面作一简单介绍．

前面指出，$f(x)$ 在数集 E 上连续是指：$f(x)$ 在 E 的每一个点都连续．也就是说，对 E 中每一点 x_0 及任意给定 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，当 $x\in E$，且 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 应当指出：这里的 $\delta>0$，不仅与 ε 有关，而且还与 x_0 有关，可记为 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$，即 δ 随着 x_0 的变化而变．如果对于 E 中不同的点 x_0，可以找到与 x_0 无关的 $\delta>0$，满足当 $x\in E$，$|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则我们称 $f(x)$ 在数集 E 上一致连续．

定义 1.3.5(一致连续) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$，$f(x)$ 是定义于 E 上的函数，如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，(δ 仅与 ε 有关)，使得对任何 x_1，$x_2\in E$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

则称 $f(x)$ 在 E 上一致连续．

一致连续的几何解释：取 $E=[a,b]$，$y=f(x)$，$x\in[a,b]$ 可以看作平面曲线 $\overset{\frown}{AB}$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$（δ 仅与 ε 有关），当 $\varepsilon>0$ 取定时，δ 可取定值，做以 ε 为半径、2δ 为长的"管子"（如图 1－1 所示），管子可以沿着曲线从 A 运动到 B，且管壁不会与曲线相撞．

定理 1.3.8(Cantor 定理) 如果 $f(x)$ 在有界闭集 $F\subset\mathbf{R}^1$ 上连续，则 $f(x)$ 在 F 上一致连续．

证 用反证法．设 $f(x)$ 在 F 上不一致连续，那么，必存在一个 $\varepsilon_0>0$，对于任何 $\delta>0$，都可以找到 x_1，$x_2\in F$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0$．

取 $\delta_n=\frac{1}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$，存在 $x_n^{(1)}$，$x_n^{(2)}\in F$，当 $|x_n^{(1)}-x_n^{(2)}|<\delta_n=\frac{1}{n}$时，有

$$|f(x_n^{(1)})-f(x_n^{(2)})|\geqslant\varepsilon_0 \quad (1.3-2)$$

于是得到两个点列$\{x_n^{(1)}\}$、$\{x_n^{(2)}\}\subset F$，且 $|x_n^{(1)}-x_n^{(2)}|<\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$．由于 F是有界闭集，故$\{x_n^{(1)}\}$存在收敛子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$，$x_{n_k}^{(1)}\to x_0\in F$，取$\{x_n^{(2)}\}$的子列$\{x_{n_k}^{(2)}\}$，由于

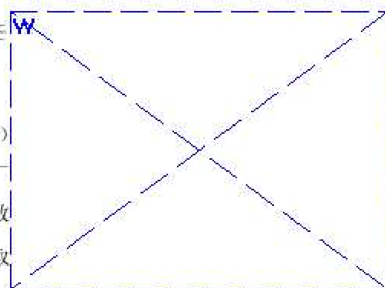


图 1－1

$$|x_{n_k}^{(1)}-x_{n_k}^{(2)}|<\frac{1}{n_k}\to 0 \qquad k\to 0$$

得知

$$|x_{n_k}^{(2)}-x_0|\leqslant|x_{n_k}^{(2)}-x_{n_k}^{(1)}|+|x_{n_k}^{(1)}-x_0|\to 0 \qquad k\to\infty$$

故 $x_{n_k}^{(2)}\to x_0$ $(k\to\infty)$．已知 $f(x)$在 F上连续，由(1.3－1)式有

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}^{(1)})=f(x_0),\quad \lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}^{(2)})=f(x_0)$$

从而

$$\lim_{k\to\infty}[f(x_{n_k}^{(1)})-f(x_{n_k}^{(2)})]=0$$

这与(1.3－2)式相矛盾． □

1.4 勒贝格(Lebesgue)测度与可测函数

1.4.1 勒贝格测度

测度是欧氏空间中长度、面积和体积概念的推广．对于实直线上的点集而言，它是长度概念的推广．为了便于理解，这里仅以实直线上的点集为例给出勒贝格测度的概念并讨论它的简单性质．

1. 有界开集与有界闭集的测度

由于测度是长度概念的推广，故在考虑区间(a,b)(或$(a,b]$，$[a,b]$，$[a,b)$)的测度时，自然要求(a,b)的测度为 $b-a$，以便与其通常的区间长度概念相一致．对于空集$\varnothing$，因$\varnothing$中没有元素，故可定义空集$\varnothing$的测度为零．

设 E是一实数集合，用记号 $m(E)$表示它的勒贝格测度．

定义 1.4.1(有界开集的测度)

(1) 空集$\varnothing$的测度 $m(\varnothing)$规定为零；

(2) 若 G是 $\mathbf{R}^1$ 中的有界开集，定义 $m(G)$为 G的所有构成区间的长度之和，即

$$m(G)=\sum_i(\beta_i-\alpha_i) \qquad (1.4-1)$$

注 1.4.1 如果 G有有限个构成区间，则(1.4－1)式右边和式具有有限项，若 G具有

可列个构成区间，因 G 有界，故 $m(G)$ 是一个正项的收敛级数.

由定义 1.4.1 易知，测度 m 具有以下的性质.

性质 1(单调性) 若 G_1，$G_2\subset\mathbf{R}^1$ 都是有界开集，且 $G_1\subset G_2$，则 $m(G_1)\leqslant m(G_2)$，特别取 $G_1=\varnothing$，$G_2=G$，则有 $m(G)\geqslant 0$.

性质 2(次可加性) $m(G_1\cup G_2)\leqslant m(G_1)+m(G_2)$ 且当 $G_1\cap G_2=\varnothing$ 时，等号成立.

定义 1.4.2(非空有界闭集的测度) 设 $F\subset\mathbf{R}^1$ 是有界闭集，规定

$$m(F)=(B-A)-m((A,B)-F) \tag{1.4-2}$$

其中 (A,B) 是包含 F 的任何开区间.

注 1.4.2 由于 $(A,B)-F$ 是有界开集，故 $m((A,B)-F)$ 有意义，再由开集测度的性质 2，有 $m(F)\geqslant 0$，并且 $m(F)$ 的值与 (A,B) 的选取无关.

再由定义 1.4.2 易知，开集与闭集的测度还有下面 3 个性质.

性质 3 有限集是有界闭集，其测度为零.

性质 4 设 F_1，F_2 都是 $\mathbf{R}^1$ 中的有界闭集，若 $F_1\subset F_2$，则有 $m(F_1)\leqslant m(F_2)$.

性质 5 设 $F\subset\mathbf{R}^1$ 是有界闭集，$G\subset\mathbf{R}^1$ 是有界开集，当 $F\subset G$ 时，有 $m(G-F)=m(G)-m(F)$；当 $G\subset F$ 时，有 $m(F-G)=m(F)-m(G)$.

例 1.4.1 考察 Cantor 集 K 的测度. 由例 1.3.2 知 Cantor 集是有界闭集，取 $(A,B)=(-1,2)\supset K$，则 $(A,B)-K=G_0\cup(-1,0)\cup(1,2)$，而 $m(G_0)=\dfrac{1}{3}+2\cdot\dfrac{1}{3^2}+\cdots+2^n\dfrac{1}{3^{n+1}}+\cdots=1$，所以 $m((A,B)-K)=m(G_0)+1+1=3$，而 $m((A,B))=3$，故 $m(K)=0$，这样我们得到一个测度为零的不可列集的例子.

2. 任意有界集的测度

我们知道圆的面积是通过极限来定义的，具体作法如下：对圆作内接正 n 边形，其面积记为 S_{n^*}，再作外切正 n 边形，其面积为 S_n^*，则圆的面积 S 满足：$S_{n^*}\leqslant S\leqslant S_n^*$. 令 $n\to\infty$，取极限，可得 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_{n^*}=\lim\limits_{n\to\infty}S_n^*$，即 $S=\sup\limits_{n\geqslant 3}S_{n^*}=\inf\limits_{n\geqslant 3}S_n^*$.

应用以上的思想来定义任意有界集的测度. 对于任何有界的非空数集 $E\subset\mathbf{R}^1$，至少有一个包含 E 的有界开集 G(如 $G=(-N,N)$)，又至少存在一个包含于 E 的闭集 F(例如，$\forall x\in E$，取 $F=\{x\}$). 可以借助于有界开、闭集的测度来定义有界非空集的测度.

定义 1.4.3(有界集的外测度) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 非空有界，称一切包含 E 的有界开集的测度的下确界为 E 的外测度，记为 $m^*(E)$，即

$$m^*(E)=\inf\{m(G)\mid G\text{为有界开集},\ E\subset G\} \tag{1.4-3}$$

注 1.4.3 对于有界开集 G，有 $m^*(G)=m(G)$.

定义 1.4.4(有界集的内测度) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 非空有界，称一切包含于 E 的有界闭集的测度的上确界为 E 的内测度，记为 $m_*(E)$，即

$$m_*(E)=\sup\{m(F)\mid F\text{为闭集},\ F\subset E\} \tag{1.4-4}$$

注 1.4.4 对于有界闭集 F，有 $m_*(F)=m(F)$.

推论 1.4.1 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 为非空有界集，则 $m_*(E)\leqslant m^*(E)$.

证 对于任何满足 $F\subset E\subset G$ 的有界闭集 F 及有界开集 G，有 $F\subset G$，由性质 5 有

$m(F) \leqslant m(G)$，从而

$$m_*(E) = \sup\{m(F) \mid F \subset E\} \leqslant m(G) \tag{1.4-5}$$

在(1.4－5)式右边取下确界，有

$$m_*(E) \leqslant \inf\{m(G) \mid E \subset G\} = m^*(E)$$

即有

$$m_*(E) \leqslant m^*(E)$$

□

定义 1.4.5(有界集的测度) 设 $E \subset \mathbf{R}^1$ 有界，如果 $m_*(E) = m^*(E)$，则称 E 是**勒贝格可测集**(简称**可测集**)，并称 E 的内测度与外测度的公共值为 E 的测度，记为 $m(E)$. 即

$$m(E) = m_*(E) = m^*(E) \tag{1.4-6}$$

3. 可测集的性质

定理 1.4.1 设 $E \subset \mathbf{R}^1$ 有界，则 E 可测 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，存在满足 $F \subset E \subset G$ 的开集 G 与闭集 F，使 $m(G-F) < \varepsilon$

证 $\Rightarrow$ 设 E 可测，则 $m^*(E) = m_*(E)$. 根据内、外测度的定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 开集 $G \supset E$，与闭集 $F \subset E$，使

$$m(G) < m^*(E) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$m(F) > m_*(E) - \frac{\varepsilon}{2}$$

由于 $m^*(E) = m_*(E)$，故 $m(G) - m(F) < \varepsilon$. 再由性质 5 有

$$m(G-F) = m(G) - m(F) < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ 设 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 满足 $F \subset E \subset G$ 的开集 G 与闭集 F，有 $m(G-F) < \varepsilon$，由性质 5 知 $m(G) - m(F) < \varepsilon$. 再由于 $m(F) \leqslant m_*(E) \leqslant m^*(E) \leqslant m(G)$，故有 $m^*(E) - m_*(E) < \varepsilon$，由 ε 的任意性知 $m^*(E) \leqslant m_*(E)$，故 $m^*(E) = m_*(E)$，即 E 可测. □

定理 1.4.2 (1) 设 $X = (A, B)$ 是开区间(有界)，$E \subset \mathbf{R}^1$ 可测，则 E 关于 $X = (A, B)$ 的余集 $E_X^C = (A, B) - E$ 是可测集.

(2) 设 E_1，E_2 可测，则 $E_1 \cup E_2$，$E_1 \cap E_2$，$E_1 - E_2$ 均可测，并且当 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ 时，有

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2) \tag{1.4-7}$$

证 (1) 因 E 可测，根据定理 1.4.1，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 开集 G、闭集 F，$F \subset E \subset G$，有 $m(G-F) < \varepsilon$. 在 (A, B) 内取两点 a, b ($a < b$) 使开集 $G_1 = G \cup (A, a) \cup (b, B)$ 满足 $m(G_1 - F) < 2\varepsilon$. 此时 G_{1X}^C 是含在 E_X^C 内的闭集，F_X^C 是包含 E_X^C 的开集. 又因 $F_X^C - G_{1X}^C = G_1 - F$，故 $m(F_X^C - G_{1X}^C) < 2\varepsilon$ ($F_X^C - G_{1X}^C$ 是开集). 根据定理 1.4.1 知 E_X^C 是可测集.

(2) 因 E_1，E_2 都是可测集，故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 开集 G_1、G_2 及闭集 F_1、F_2，使 $F_i \subset E_i \subset G_i$，$m(G_i - F_i) < \varepsilon$，$i = 1, 2$. 令 $G = G_1 \cup G_2$，$F = F_1 \cup F_2$，易见 $G - F \subset (G_1 - F_1) \cup (G_2 - F_2)$，故 $m(G-F) < 2\varepsilon$，注意 $G \supset (E_1 \cup E_2) \supset F$，且 G，F 分别是开集与闭集，由定理 1.4.1 知 $E_1 \cup E_2$ 可测.

当 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ 时，$F_1 \cap F_2 = \varnothing$，故有

$$\begin{aligned} m(E_1 \cup E_2) &\geqslant m(F_1 \cup F_2) = m(F_1) + m(F_2) \\ &\geqslant m(G_1) + m(G_2) - 2\varepsilon \geqslant m(E_1) + m(E_2) - 2\varepsilon \end{aligned}$$

注意，$\varepsilon > 0$ 任意可得 $m(E_1 \cup E_2) \geqslant m(E_1) + m(E_2)$. 同理可证 $m(E_1 \cup E_2) \leqslant m(E_1) + m(E_2)$，从而(1.4－7)式成立.

关于 $E_1 \cap E_2$ 与 $E_1 - E_2$ 的可测性，只要注意到

$$E_1 \cap E_2 = (E_{1X}^C \cup E_{2X}^C)_X^C$$

$$E_1 - E_2 = E_1 \cap E_{2X}^C$$

应用本定理的结论(1)便可证明. □

该定理的结论(2)是说可测集对于并、交、差三种运算是封闭的.

定理 1.4.3 设 E_1，E_2 是两个有界可测集.

(1) **单调性**：若 $E_1 \subset E_2$，则 $m(E_1) \leqslant m(E_2)$ (1.4－8)

(2) **次可加性**：$m(E_1 \cup E_2) \leqslant m(E_1) + m(E_2)$ (1.4－9)

证略. □

定理 1.4.4(完全可加性) 若 E_1，E_2，…，E_n，…是一列有界可测集，记 $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 有界，则 E 是可测集. 且有

$$m(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \tag{1.4－10}$$

特别地，当$\{E_i\}$互不相交时，有

$$m(E) = m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \tag{1.4－11}$$

证略. □

定理 1.4.5 若 E_1，E_2，…，E_n，…是一列有界可测集，则它们的交集 $E = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 也可测.

证略. □

(1.4－11)式表示测度具有完全可加性，定理 1.4.4 及定理 1.4.5 说明可测集对可列并，可列交的运算是封闭的.

例 1.4.2 证明有界可数集 $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$是可测集，且其测度 $m(A) = 0$.

证 令 $E_i = \{x_i\}$，$i = 1, 2, 3, \cdots$，E_i 是单点集，故 $m(E_i) = 0$，由定理 1.4.4 知，A 可测且有

$$m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) = 0$$

故 $m(A) = 0$.

从例 1.4.2 知：[0，1]中全体有理数集是可测集，其测度为零. 而[0，1]中的全体无理数集也是可测集，其测度为 1.

例 1.4.3 证明：零测集的任何子集是零测集.

证 设 A 是零测集，即 $m(A) = 0$，$A_1 \subset A$，由于 $m_*(A_1) \geqslant 0$，故只要证明 $m^*(A_1) = 0$ 即可. 由 $m(A) = 0$，故 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists$ 开集 $G \supset A$，使 $m(G) < \varepsilon$，由 $A_1 \subset A \subset G$，所以 $m^*(A_1) \leqslant m(G) < \varepsilon$，由 $\varepsilon > 0$ 任意，知 $m^*(A_1) = 0$.

4. 几个值得注意的问题

1) 关于无界集的测度问题

定义 1.4.6(无界集的测度) 设 $E \subset \mathbf{R}^1$，如果对于任何 $x > 0$，有界集$(-x, x) \cap E$ 是可测集，则称 E 是可测集，并称极限

$$\lim_{x\to+\infty} m((-x, x)\cap E)$$
为 E 的测度，记为 $m(E)$.

注 1.4.5 无界点集的测度可能是有限数，也可能是无穷大. 例如全体有理数集 **Q** 是无界的零测集. 而 $E=(0, +\infty)$ 是可测集，但 $m(E)=+\infty$. 对于无界的可测集，定理 1.4.2～定理 1.4.5 的结论也成立.

2）可测集类

定义 1.4.7(可测集类) 由 $\mathbf{R}^1$ 中的所有可测集组成的集合称为可测集类，记为 L.

由可测集的性质可以看出，可测集的并、交、差都是可测集，在一定的条件下，可测集的可列并、可列交也是可测集. 由此可见，可测集类是一个非常庞大、十分复杂的集合类，我们通常见到的数集都属于 L. 由于开集、闭集都是可测集，从开集、闭集出发，经过并、交、差、可列并、可列交运算后得到的集合称之为波雷尔(Borel)集，由 Borel 集组成的集类称为 Borel 集类，记为 B. 显然 $B\subset L$.

3）不可测集是存在的

实直线 $\mathbf{R}^1$ 上的点集，并非都是可测集，不可测集确实存在. 因为开集、闭集、可列集都是可测集，它们经过上述运算后仍得可测集，因此，举出一个不可测集的例子是很困难的，这里我们就不列举了. 关于不可测的例子，可参看文献[1].

1.4.2 可测函数

本小节我们引进一类新的函数，称为可测函数，并讨论它的简单性质.

1. 可测函数的定义及例子

定义 1.4.8(可测函数) 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的实值函数，若 $\forall\, a\in\mathbf{R}^1$，$E$ 的子集

$$E(a)=\{x\in E \mid f(x)>a\} \qquad (1.4-12)$$

是可测集，则称 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

(1.4－12)式中的子集 $\{x\in E\mid f(x)>a\}$ 也经常记为 $E(x\mid f(x)>a)$.

例 1.4.4 定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数是可测函数.

证 $\forall\, a\in\mathbf{R}^1$，集合 $E(a)=\{x\mid f(x)>a,\ x\in\mathbf{R}^1\}$ 是一开集. 事实上，$\forall\, x_0\in E(a)$，有 $f(x_0)>a$，由 $f(x)$ 在 x_0 点连续，故 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，则 $\exists\,\delta>0$，当 $x\in O(x_0, \delta)$ 时，有 $f(x)>a$，即 $O(x_0, \delta)\subset E(a)$，这就证明了 $E(a)$ 是开集. 所以 $E(a)\subset\mathbf{R}^1$ 是可测集，故 $f(x)$ 是可测函数.

例 1.4.5 设 $E_i(i=1, 2, \cdots, N)$ 是 N 个可测集，且 E_i 互不相交，$E=\bigcup\limits_{i=1}^{N} E_i$，$f$ 是定义于 E 上，且在 E_i 上分别取值为 $C_i(i=1, 2, \cdots, N)$ 的函数(称为简单函数或阶梯函数)，则 $f(x)$ 是可测函数.

证 $\forall\, a\in\mathbf{R}$，集

$$E(a)=\{x\mid f(x)>a,\ x\in E\}$$

或是空集，或是有限个 E_i 之并集，故 $E(a)$ 可测，从而 $f(x)$ 是可测函数.

例 1.4.6 狄立克雷(Dirichlet)函数 $D(x)$ 是可测函数，其中

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\text{为}[0,1]\text{中的有理数}\\ 0 & x\text{为}[0,1]\text{中的无理数}\end{cases}$$

证 当 $\sigma\geqslant 1$ 时，$E(\sigma)=\{x|D(x)>\sigma, x\in[0,1]\}=\varnothing$；

当 $0\leqslant\sigma<1$ 时，$E(\sigma)=\{x|D(x)>\sigma, x\in[0,1]\}=\{x|x$为$[0,1]$中的有理数$\}$为可测集；

当 $\sigma<0$ 时，$E(\sigma)=\{x|D(x)>\sigma, x\in[0,1]\}=[0,1]$为可测集.

所以 $D(x)$是可测函数.

2. 可测函数的性质

定理 1.4.6(可测集的运算) 设 $f(x)$是可测集 E上的可测函数，则 $\forall\sigma\in\mathbf{R}^1$，集

$$E(x|f(x)\geqslant\sigma),\ E(x|f(x)\leqslant\sigma)$$
$$E(x|f(x)=\sigma),\ E(x|a\leqslant f(x)\leqslant b)$$

都是可测集.

证 由集合的运算性质，易知上述点集可分别改写为

$$E(x|f(x)\geqslant\sigma)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(x|f(x)>\sigma-\frac{1}{n}\right)$$
$$E(x|f(x)\leqslant\sigma)=E-E(x|f(x)>\sigma)$$
$$E(x|f(x)=\sigma)=E(x|f(x)\geqslant\sigma)-E(x|f(x)>\sigma)$$
$$E(x|a\leqslant f(x)\leqslant b)=E(x|f(x)\geqslant a)\cap E(x|f(x)\leqslant b)$$

再应用可测集的运算性质便得结论. □

关于可测函数的运算，我们有以下定理.

定理 1.4.7(可测函数的运算) 设 $f(x)$，$g(x)$都是可测集 E上的可测函数，则函数：$kf(k\in\mathbf{R}^1)$；$f\pm g$；$|f|^\alpha(\alpha\in\mathbf{R}^1)$；$f\cdot g$；$f/g(g\neq0)$；$\max(f,g)$，$\min(f,g)$都是 E上的可测函数.

证 仅证 $f-g$，$|f|^\alpha(\alpha\in\mathbf{R}^1)$是可测函数，其它结论留给读者自己证明.

$\forall\sigma>0$

$$E(x|f(x)-g(x)>\sigma)=E(x|f(x)>g(x)+\sigma)$$
$$=\bigcup_{i=1}^{\infty}[E(x|f(x)>r_i)\cap E(x|g(x)<r_i-\sigma)]$$

其中 r_i是满足 $f(x)>r_i>g(x)+\sigma$的一切有理数(由有理数稠密，这样的有理数必存在).由定理 1.4.6 及定理 1.4.4 知$\{x|f(x)-g(x)>\sigma, x\in E\}$是可测集，从而 $f-g$是可测函数.

因为 $\forall\sigma>0$，

$$E(x||f(x)|^\alpha>\sigma)=\begin{cases}E & \sigma\leqslant 0\\ E(x||f(x)|>\sigma^{\frac{1}{\alpha}}) & \sigma>0\end{cases}$$

均为可测集，所以$|f|^\alpha$是可测函数. □

由可测函数的定义，容易看出：改变函数在某个零测集上的值对函数的可测性不会产生影响，这样，常常引用“几乎处处”的概念. 设 $p(x)$是一个与 x有关的数学命题，如果它在点集 E上不成立的点的全体是一个零测集，就称命题 $p(x)$在 E上几乎处处成立，常用 a.e 表示.

例 1.4.7 狄立克雷(Dirichlet)函数 $D(x)$ 在 $E=[0, 1]$ 上几乎处处为零，即 $D(x)=0$, a.e 于 E.

例 1.4.8 设

$$f(x) = \tan x$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x\text{为有理数} \\ \tan x & x\text{为无理数} \end{cases}$$

则 $f(x)$ 几乎处处等于 $g(x)$，记为 $f(x)=g(x)$, a.e 于 $(-\infty, \infty)$.

例 1.4.9 设 $\{r_n\}$ 是全体有理数的一个排列，令

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = r_1, r_2, \cdots, r_n \\ 0 & x \neq r_1, r_2, \cdots, r_n \end{cases}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, a.e 于 $(-\infty, +\infty)$，即 $f_n(x)$ 几乎处处收敛于 Dirichlet 函数 $D(x)$.

定理 1.4.8 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数，且 $g(x)=f(x)$, a.e 于 E，则 $g(x)$ 也是 E 上的可测函数.

证 $\forall a\in \mathbf{R}^1$，点集 $E(x|g(x)>a)$ 可改写为

$$[E(x \mid f(x) > a) \cap E(x \mid g(x) = f(x))] \cup [E(x \mid g(x) > a) \cap E(x \mid g(x) \neq f(x))]$$

由于 $E(x|f(x)\neq g(x))$ 是零测集，故 $E(x|g(x)>a)\cap E(x|f(x)\neq g(x))$ 也是零测集，又 $E(x|f(x)=g(x))=E-E(x|f(x)\neq g(x))$ 是可测集，由定理 1.4.2 知 $E(x|g(x)>a)$ 可测，即 $g(x)$ 是 E 上的可测函数. □

3. 可测函数列的极限

关于函数列的收敛概念，已见过三种：

(1) $\{f_n(x)\}$ **在 E 上逐点收敛于 $f(x)$**，是指：$\forall \varepsilon>0$，对 $x\in E$，$\exists N$(N 与 ε、与 x 都有关)，当 $n>N$ 时有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，记为

$$f_n(x) \to f(x) \qquad n\to\infty$$

(2) $\{f_n(x)\}$ **在 E 上一致收敛于 $f(x)$**，是指：$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$(N 仅与 ε 有关，与 x 无关)，当 $n>N$ 时，对每一 $x\in E$，都有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，记为

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \qquad n\to\infty$$

一致收敛的几何解释：在几何上，$\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 表示，当 $n>N$ 时，$f_n(x)$ 的图形在曲线 $f(x)$ 的 ε 邻域内，如图 1-2 所示.

(3) $\{f_n(x)\}$ **在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$**，是指：$\exists E_0\subset E$，$m(E_0)=0$，且 $f_n\to f$(在 $E-E_0$ 上)，记为 $f_n\to f$, a.e 于 E.

把以上三种函数列收敛概念按“强”到“弱”排序，它们之间有以下的蕴含关系，即(2) $\Rightarrow$(1)$\Rightarrow$(3).

下面再给出更弱的收敛概念，称之为以测度收敛.

定义 1.4.9(依测度收敛) 设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的一列可测函数，如果有函数 $f(x)$，满足：$\forall \varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty} m(E(x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon)) = 0$$

称函数列 $\{f_n(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$，记为 $f_n\overset{m}{\Rightarrow} f$.

可以证明：若 $m(E)<+\infty$，$f_n\to f$，a.e. 于 E，则 $f_n\overset{m}{\Rightarrow}f$.

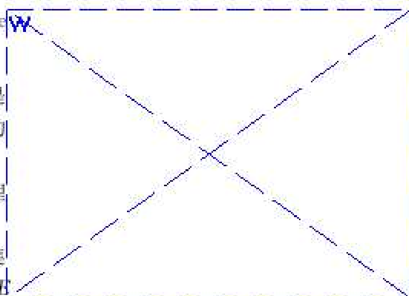


图 1－2

注 1.4.6 定义 1.4.9 中并没有假定 f 是 E 上的可测函数，只是假定 $|f_n-f|$ 是 E 上的可测函数.

关于可测函数列的极限，有以下几个定理(限于篇幅，证明略去).

定理 1.4.9 设 $f(x)$，$\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的函数及可测函数列，如果 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上逐点收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 在 E 上可测. □

定理 1.4.10 设 $f(x)$，$\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的函数及可测函数列，如果 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 是 E 上的可测函数. □

定理 1.4.11 如果 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$，则存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$. □

注 1.4.7 由定理 1.4.11 及定理 1.4.10 可得 $f(x)$ 也可测.

注 1.4.8 对于连续函数类(如 $C[a,b]$)，其四则运算是封闭的，但极限运算是不封闭的(如逐点收敛). 对于可测函数类就有明显的优势，它不仅对四则运算封闭，而且对极限运算(如逐点收敛，几乎处处收敛，依测度收敛)也是封闭的，这就为积分的极限定理奠定了理论基础.

4. 可测函数的结构

对于复杂的函数，如果能用简单的函数来“逼近”，则对进一步了解其性质很有帮助. 最常见的简单函数有阶梯函数、连续函数等. 这里我们可用阶梯函数(例 1.4.5 中的函数)、连续函数来揭示可测函数的构造.

定理 1.4.12(可测的充要条件) $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 可以表示为阶梯函数列的极限.

证明略. □

定理 1.4.13(鲁金，Лузин) 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的可测函数，则 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,[a,b]$ 上的连续函数 $g(x)$，满足：

$$m(E(x\mid f(x)\neq g(x)))<\varepsilon$$

证明略. □

定理 1.4.13 说明 $[a,b]$ 上的可测函数 $f(x)$ 与连续函数的“差别”很小，$f(x)$ 仅在 $[a,b]$ 的测度很小的子集(不是零测集)上不连续外，在其它点处均连续.

1.5 勒贝格积分

在微积分中建立的积分，称为黎曼(Riemann)积分，这种积分对微积分的建立和发展

起了无可代替的作用，解决了科学技术领域许多实际问题和理论问题. 但是，随着科学技术的不断发展，它的局限性越来越明显，主要表现在以下两个方面：

(1) 黎曼积分对被积函数及积分域要求过于严格. 也就是说，只有函数具有“较好连续性”时，即要求函数“几乎处处连续”时，黎曼积分才存在. 这样像$[0, 1]$上的狄立克雷函数$D(x)$就被排斥在黎曼可积函数类之外；这种积分要求积分域为区间，而对一般点集$E \subset \mathbf{R}^1$上的积分无法定义.

(2) 黎曼积分在理论上存在着某些弊病. 例如，可积函数列的极限函数(逐点收敛)未必可积；极限运算与积分运算只有在很强的条件(如函数列一致收敛，级数一致收敛)之下才能交换次序，黎曼可积函数类以某些条件构成的空间不具有完备性等，这些弊病使它的应用范围受到限制.

为了克服以上的局限性，法国数学家勒贝格于 1902 年建立了一套新的(勒贝格)积分理论. 这种积分，对函数的限制较少，适用范围更大，应用更灵活，是对黎曼积分的一种改进. 这节我们简要地介绍勒贝格积分的基本内容.

1.5.1 勒贝格积分的定义与性质

1. 测度有限集上有界函数的勒贝格积分

定义 1.5.1(勒贝格积分) 设 $m(E) < +\infty$，$f(x)$是 E 上的有界可测函数，$A < f(x) < B$，对区间$[A, B]$取任一分割：

$$\Delta: A = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = B$$

令 $\lambda(\Delta) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(y_i - y_{i-1})$，$E_i = E(x \mid y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i)$. 任取 $\xi_i \in [y_{i-1}, y_i]$，作和式：

$$\sigma(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i m(E_i) \tag{1.5-1}$$

如果当 $\lambda(\Delta) \to 0$ 时，$\sigma(\Delta)$的极限存在，且该极限值与$[A, B]$的分割及 ξ_i 的选取无关，则称 **$f(x)$在 E上是勒贝格可积的**，并称此极限值为 $f(x)$在 E 上的**勒贝格积分**(简称为 L 积分)，记为$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$. 即

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(\Delta) \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i m(E_i) \tag{1.5-2}$$

为了研究勒贝格积分的存在性，先介绍**大和**与**小和**. 设 $f(x)$是可测集 $E(m(E) < +\infty)$上的可测函数. 作和式：

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} y_i m(E_i), \quad s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m(E_i)$$

分别称 $S(\Delta)$，$s(\Delta)$为 $f(x)$在 E 上的勒贝格**大和**与**小和**. 容易看出有如下的性质：

(1) 对于任何分割 Δ 有：$s(\Delta) \leqslant \sigma(\Delta) \leqslant S(\Delta)$；

(2) 如果 Δ'是 Δ 的“加细”分割(即 Δ'是 Δ增加分点而成的)，则

$$s(\Delta') \geqslant s(\Delta), \quad S(\Delta') \leqslant S(\Delta)$$

即当分点加细时，大和不增，小和不减；

(3) 对任何的两个分割 Δ_1、Δ_2，有

$$s(\Delta_1) \leqslant S(\Delta_2)$$

从上述性质可知，数集$\{s(\Delta)\mid\Delta$ 是任一分割$\}$上方有界；$\{S(\Delta)\mid\Delta$ 是任一分割$\}$下方有界，由此可得：$\sup\{s(\Delta)\}$，$\inf\{S(\Delta)\}$都存在，记

$$\underline{\int}_E f(x)\,\mathrm{d}x=\sup\{s(\Delta)\},\ \overline{\int}_E f(x)\,\mathrm{d}x=\inf\{S(\Delta)\}$$

并分别称为 $f(x)$在 E上的**下积分与上积分**. 显然有

$$\underline{\int}_E f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\overline{\int}_E f(x)\,\mathrm{d}x$$

定理 1.5.1(*L*积分的存在定理) 若 $m(E)<+\infty$，$f(x)$是 E上的可测函数，则 $f(x)$在 E上 L可积，且有

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\int}_E f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int}_E f(x)\,\mathrm{d}x$$

证 $\forall\ x\in E$，有 $A\leqslant f(x)\leqslant B$，对$[A,B]$的任一分割 Δ，恒有

$$s(\Delta)\leqslant\underline{\int}_E f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\overline{\int}_E f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant S(\Delta)$$

$$s(\Delta)\leqslant\sigma(\Delta)\leqslant S(\Delta)$$

因为 $\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(y_i-y_{i-1})$，所以

$$\begin{aligned}0\leqslant S(\Delta)-s(\Delta)&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i-1})m(E_i)\\&\leqslant\lambda(\Delta)\sum_{i=1}^{n}m(E_i)=\lambda(\Delta)m(E)\end{aligned}$$

因此

$$0\leqslant\overline{\int}_E f(x)\,\mathrm{d}x-\underline{\int}_E f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\lambda(\Delta)m(E)$$

当 $\lambda(\Delta)\to0$ 时，显然有

$$\overline{\int}_E f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\int}_E f(x)\,\mathrm{d}x\qquad(1.5-3)$$

记

$$\underline{\int}_E f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int}_E f(x)\,\mathrm{d}x=I$$

由

$$|\sigma(\Delta)-I|\leqslant S(\Delta)-s(\Delta)\leqslant\lambda(\Delta)m(E)$$

可得

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to0}\sigma(\Delta)=I=\underline{\int}_E f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int}_E f(x)\,\mathrm{d}x\qquad\square$$

由定理 1.5.1 知 Dirichlet 函数 $D(x)$在$[0,1]$上是 L可积的，而 $D(x)$在$[0,1]$上是 R不可积的.

注 1.5.1 由定理 1.5.1 的证明不难看出：证明可测函数 $f(x)$在 E上可积的关键在于证明等式(1.5－3). 因此(1.5－3)式是 $f(x)$在 E上 L可积的等价条件. 正因如此，有的书上正是应用等式(1.5－3)作 L可积的定义. 不难得到下面推论.

推论 1.5.1 如果 $f(x)$在 $E=[a,b]$上 R可积，则 $f(x)$在$[a,b]$上必 L可积，并有

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\qquad(1.5-4)$$

这里 $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 Riemann 积分.

下面介绍勒贝格积分的性质. 这里总假定 $m(E)<+\infty$，$f(x)$，$g(x)$ 是 E 上的可测函数.

性质 1(线性性质) 设 $\alpha, \beta\in\mathbf{R}^1$，则

$$(L)\int_E[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x+\beta(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.5-6}$$

性质 2(有限可加性) 设 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$，$E_1$，$E_2$，…，$E_n$ 是可测集，且 $E_i\cap E_j=\varnothing$，$i\neq j$，则

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}(L)\int_{E_i}f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.5-7}$$

性质 3 若 $m(E)=0$，则 $(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

性质 4(不等式性质) 若 $a\leqslant f(x)\leqslant b$，则

$$am(E)\leqslant(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant bm(E) \tag{1.5-8}$$

性质 5(不等式性质) 若 $f(x)\leqslant g(x)$，a. e 于 E，则

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant(L)\int_E g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.5-9}$$

性质 6 若 $f(x)=g(x)$，a. e 于 E，则

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=(L)\int_E g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.5-10}$$

证 仅证性质 4 及性质 5. 先证性质 4. $\forall\,\varepsilon>0$，有

$$a-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$$

对 $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ 的任意分割 Δ：

$$\Delta:\ a-\varepsilon=y_0<y_1<\cdots<y_n=b+\varepsilon$$

$$(a-\varepsilon)m(E)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\xi_i m(E_i)\leqslant(b+\varepsilon)m(E)$$

令 $\lambda(\Delta)\to0$，有

$$(a-\varepsilon)m(E)\leqslant(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant(b+\varepsilon)m(E)$$

再令 $\varepsilon\to0$，便得不等式(1.5－8).

再证性质 5. 记 $h(x)=g(x)-f(x)$，则 $h(x)\geqslant0$，a. e 于 E. 由 L 积分的可加性有

$$(L)\int_E h(x)\,\mathrm{d}x=(L)\int_{E[x|h(x)\geqslant0]}h(x)\,\mathrm{d}x+(L)\int_{E[x|h(x)\leqslant0]}h(x)\,\mathrm{d}x$$

由性质 3 可知 $(L)\int_{E[x|h(x)\leqslant0]}h(x)\,\mathrm{d}x=0$，再由性质 4 知，$(L)\int_{E[x|h(x)\geqslant0]}h(x)\,\mathrm{d}x\geqslant0$. 应用性质 1 便得不等式(1.5－9)成立. □

例 1.5.1 由于 Dirichlet 函数 $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处为零，根据性质 6 可知 $(L)\int_{[0,1]}D(x)\,\mathrm{d}x=0$.

前面已经指出：$D(x)$ 不是 Riemann 可积函数，而 $D(x)$ 是 Lebesgue 可积函数，这说明

至少有一个函数是 L可积而不是 R可积的. 由性质 1，任何 R可积函数与 $D(x)$之和是 L可积而非 R可积(因 R可积必 L可积). 由此可见，L可积函数类较 R可积函数类广泛得多.

2. 无界函数及测度无限集上的勒贝格积分

首先考虑 $m(E)<+\infty$，$f(x)$在 E上无界可测的情况.

对于任何函数 $f(x)$，总可以写成两个非负函数之差：

$$f(x)=f^{+}(x)-f^{-}(x)$$

其中

$$f^{+}(x)=\begin{cases}f(x) & \text{当 } f(x)\geqslant 0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } f(x)<0 \text{ 时}\end{cases}$$

$$f^{-}(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } f(x)\geqslant 0 \text{ 时}\\ -f(x) & \text{当 } f(x)<0 \text{ 时}\end{cases}$$

分别称 $f^{+}(x)$，$f^{-}(x)$是 $f(x)$的**正部和负部**.

设 $f(x)$是 $E(m(E)<+\infty)$上的非负可测函数，作函数

$$[f(x)]_n=\begin{cases}n & \text{当 } f(x)>n \text{时}\\ f(x) & \text{当 } f(x)\leqslant n \text{时}\end{cases}$$

则$[f(x)]_n$是一列非负有界可测函数，并且有

$$[f(x)]_1\leqslant[f(x)]_2\leqslant\cdots\leqslant[f(x)]_n\leqslant\cdots$$

称$[f(x)]_n$为 $f(x)$的**第 n截断函数**. 对于每一个 n，$(L)\int_E[f(x)]_n\,\mathrm{d}x$ 都存在，且 $\left\{(L)\int_E[f(x)]_n\,\mathrm{d}x\right\}$ 是一单增数列.

(1) 如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(L)\int_E[f(x)]_n\,\mathrm{d}x<+\infty$，称 $f(x)$在 E上**勒贝格可积**，并规定

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(L)\int_E[f(x)]_n\,\mathrm{d}x \tag{1.5-11}$$

(2) 如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(L)\int_E[f(x)]_n\,\mathrm{d}x=+\infty$，则称 $f(x)$在 E上**有积分**.

对于 $E(m(E)<+\infty)$上一般的无界可测函数 $f(x)$，定义 $f(x)$在 E上的勒贝格积分为

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=(L)\int_E f^{+}(x)\,\mathrm{d}x-(L)\int_E f^{-}(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.5-12}$$

(3) 当(1.5-12)式右边两积分都为有限数时，称 **$f(x)$在 E上勒贝格可积**；当一个积分有限，而另一个为无限时，称 **$f(x)$在 E上有积分**；当两个积分均无限时，称**积分无意义**.

其次考虑测度无限集上的勒贝格积分.

记 $E(n)=[-n,n]\cap E$，则

$$E(1)\subset E(2)\subset\cdots\subset E(n)\subset\cdots$$

设 $F(x)$是 E上的非负无界的可测函数，作函数

$$[F(x)]_n=\begin{cases}0 & x\in E(n)\\ n & x\in E(n)\text{ 且 } f(x)>n\\ F(x) & x\in E(n)\text{ 且 } f(x)\leqslant n\end{cases}$$

则$[F(x)]_n$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，单调增，且有

$$\lim_{n\to\infty}[F(x)]_n=\begin{cases}F(x) & x\in E\\ 0 & x\in E\end{cases}$$

$[F(x)]_n$在$E(n)$上L可积，$\left\{\int_{E(n)}[F(x)]_n\,\mathrm{d}x\right\}$是单增数列.

(4) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}(L)\int_{E(n)}[F(x)]_n\,\mathrm{d}x<+\infty$，称非负可测函数$F(x)$**在$E$上$L$可积**，并规定

$$(L)\int_E F(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(L)\int_{E(n)}[F(x)]_n\,\mathrm{d}x \tag{1.5-13}$$

设$f(x)$是可测集E(测度可以为无穷)上的可测函数(可以无界)，作$f(x)$的延拓$F(x)$，其定义为

$$F(x)=\begin{cases}f(x) & x\in E\\ 0 & x\in E\end{cases}$$

则$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，令

$$F(x)=F^+(x)-F^-(x)$$

定义 1.5.2(L积分) 如果$F^+(x)$，$F^-(x)$都在E上可积，即

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_{E(n)}[F^+(x)]_n\,\mathrm{d}x,\quad \lim_{n\to\infty}(L)\int_{E(n)}[F^-(x)]_n\,\mathrm{d}x \tag{1.5-14}$$

都为有限数，**称$f(x)$在E上L可积**，并规定

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(L)\int_{E(n)}[F^+(x)]_n\,\mathrm{d}x-\lim_{n\to\infty}(L)\int_{E(n)}[F^-(x)]_n\,\mathrm{d}x \tag{1.5-15}$$

如果(1.5-14)式中一个有限，另一个无限，称**$f(x)$在E上有积分**；当两个极限均无限时，**称积分无意义**.

定理 1.5.2(绝对可积性) 设$E\subset\mathbf{R}^1$可测(可以$m(E)=+\infty$)，$f(x)$是E上的可测函数(可以是无界函数)，则$f(x)$在E上L可积$\Longleftrightarrow|f(x)|$在$E$上$L$可积，且有

$$\left|(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant(L)\int_E|f(x)|\,\mathrm{d}x \tag{1.5-16}$$

证 $\Rightarrow$ 若$f(x)$ L可积，则$\int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$，$\int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$. 由于$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$，故

$$(L)\int_E|f(x)|\,\mathrm{d}x=(L)\int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x+(L)\int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$$

即$|f(x)|$在E上L可积.

$\Leftarrow$ 设$|f(x)|$在E上L可积，则由$0\leqslant f^+(x)\leqslant|f(x)|$，$0\leqslant f^-(x)\leqslant|f(x)|$易知，$\forall x\in E(n)$，有

$$[f^+(x)]_n \leqslant [|f(x)|]_n, \quad [f^-(x)]_n \leqslant [|f(x)|]_n$$

由(1.5－13)式可得

$$(L)\int_E f^+(x)\,dx \leqslant (L)\int_E |f(x)|\,dx < +\infty$$

$$(L)\int_E f^-(x)\,dx \leqslant (L)\int_E |f(x)|\,dx < +\infty$$

从而

$$(L)\int_E f(x)\,dx = (L)\int_E f^+(x)\,dx - (L)\int_E f^-(x)\,dx < +\infty$$

故 $f(x)$在 E上 L可积.

$$\begin{aligned}\left|(L)\int_E f(x)\,dx\right| &= \left|(L)\int_E f^+(x)\,dx - (L)\int_E f^-(x)\,dx\right| \\ &\leqslant (L)\int_E f^+(x)\,dx + (L)\int_E f^-(x)\,dx \\ &= (L)\int_E |f(x)|\,dx\end{aligned}$$

即不等式(1.5－16)成立. □

定理 1.5.3(绝对连续性) 设 $E\subset \mathbf{R}^1$ 可测，$f(x)$是 E上的可积函数，则 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，对 $E_0\subset E$，$m(E_0)<\delta$时，有

$$\left|(L)\int_{E_0} f(x)\,dx\right| < \varepsilon \tag{1.5－17}$$

证 根据定理 1.5.2 知$|f(x)|$在 E上 L可积.再由(1.5－13)式可知，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_0$，使

$$(L)\int_E |f(x)|\,dx - (L)\int_{E(N_0)} [|f(x)|]_{N_0}\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

由于

$$(L)\int_{E(N_0)} [|f(x)|]_{N_0}\,dx \leqslant (L)\int_E [|f(x)|]_{N_0}\,dx$$

故

$$(L)\int_E (|f(x)| - [|f(x)|]_{N_0})\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2N_0}$，当 $m(E_0)<\delta$时，再由(1.5－16)式得

$$\begin{aligned}\left|(L)\int_{E_0} f(x)\,dx\right| &\leqslant (L)\int_{E_0} |f(x)|\,dx \\ &\leqslant (L)\int_{E_0} (|f(x)| - [|f(x)|]_{N_0})\,dx + (L)\int_{E_0} [|f(x)|]_{N_0}\,dx \\ &\leqslant (L)\int_E (|f(x)| - [|f(x)|]_{N_0})\,dx + N_0 \cdot m(E_0) \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + N_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2N_0} = \varepsilon\end{aligned}$$

□

这个定理的结论称为**积分的绝对连续性**，即可积函数在可测集的充分小的子集合上 L 积分值可以任意小，它反映了 L积分值与积分域之间的一种依赖关系.

1.5.2 积分的极限定理

前面已经指出，对于 Riemann 积分，在积分号下取极限，对函数列的要求很强(一致收敛). 而对于 Lebesgue 积分，从下述定理将会看到，在处理积分与极限交换顺序时，所加的条件比 R 积分要弱的多，因此 L 积分较 R 积分适用范围广，处理问题灵活方便.

定理 1.5.4(控制收敛定理) 设 $m(E)<+\infty$，$\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的一列可测函数，满足：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，a.e 于 E;

(2) 存在 E 上的 L 可积函数 $F(x)$，在 E 上，有

$$|f_n(x)|\leqslant F(x) \qquad \text{a.e 于 } E$$

则 $f(x)$ 在 E 上 L 可积，并且

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(L)\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.5-18}$$

证 先证 $f(x)$ 在 E 上 L 可积. 由 $|f_n(x)|\leqslant F(x)$，a.e 于 E，则 $|f(x)|\leqslant F(x)$，a.e 于 E. 故对 $x\in E(n)=[-n,n]\cap E$，有

$$[|f(x)|]_n\leqslant[F(x)]_n \qquad n=1,2,3,\cdots$$

由于 $F(x)$ 在 E 上 L 可积，由(1.5-13)式所得

$$(L)\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(L)\int_{E(n)}[|f(x)|]_n\,\mathrm{d}x\leqslant\lim_{n\to\infty}(L)\int_{E(n)}[F(x)]_n\,\mathrm{d}x$$

$$=(L)\int_E F(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$$

即 $|f(x)|$ 在 E 上 L 可积，从而 $f(x)$ 在 E 上 L 可积.

再证等式(1.5-18). 由 L 积分的绝对连续性，$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当 $E_0\subset E$，$m(E_0)<\delta$ 时，有

$$\left|(L)\int_{E_0} F(x)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

对 $\eta m(E)<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 的 $\eta>0$，令

$$E_n(\eta)=E[x\,||\,f_n(x)-f(x)|\geqslant\eta]$$
$$E_n'(\eta)=E[x\,||\,f_n(x)-f(x)|<\eta]$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，a.e 于 E，可得 $f_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$ ($f_n\overset{m}{\Rightarrow}f$). 因此，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有 $m(E_n(\eta))<\delta$，从而有

$$\left|(L)\int_{E_n(\eta)} F(x)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

$$(L)\int_{E_n(\eta)}|f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant(L)\int_{E_n(\eta)}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x+(L)\int_{E_n(\eta)}|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2(L)\int_{E_n(\eta)}F(x)\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2} \tag{1.5-19}$$

$$(L)\int_{E_n'(\eta)}|f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x<\eta m(E_n'(\eta))$$

$$\leqslant \eta m(E) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.5-20}$$

所以当 $n > N$ 时，结合(1.5－19)、(1.5－20)式有

$$\begin{aligned}
&\left|(L)\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x - (L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant (L)\int_E |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= (L)\int_{E_n(\eta)} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x + (L)\int_{E_n'(\eta)} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$$ □

注 1.5.2 应用控制收敛定理可以证明(略)：有界函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上 R 可积 $\Longleftrightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处连续.

作为控制收敛定理的一个应用，用它可以推出参变量积分的连续定理.

定理 1.5.5 设 $f(x, t)$ 在矩形 $\{(x, t) \mid a \leqslant x \leqslant b, \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ 有定义，如果 $\forall t \in [\alpha, \beta]$，$f(x, t)$ 关于 x 在 $[a, b]$ 上 L 可积，且满足：

(1) 当 $t' \to t$ 时，$f(x, t')$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处收敛于 $f(x, t)$；

(2) 存在 $[a, b]$ 上的 L 可积函数 $F(x)$，使得 $|f(x, t)| \leqslant F(x)$，a. e 于 E，则 $\forall t \in [\alpha, \beta]$，积分

$$I(t) = \int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}x$$

存在，且是 t 的连续函数.

证 $\forall t \in [\alpha, \beta]$，由 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上 L 可积，故 $f(x, t)$ 也对 x 勒贝格可积，因而 $I(t)$ 存在. 下证：$I(t)$ 是 t 的连续函数. 设 $t_0 \in [\alpha, \beta]$，任取 $[\alpha, \beta]$ 中一数列 $\{t_n\}$，$t_n \to t_0$，作函数列 $\{f(x, t_n)\}$，$F(x)$ 作为控制函数，由控制收敛定理知

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} I(t_n) &= \lim_{n\to\infty}(L)\int_{[a, b]} f(x, t_n)\,\mathrm{d}x \\
&= (L)\int_{[a, b]} [\lim_{n\to\infty} f(x, t_n)]\,\mathrm{d}x \\
&= (L)\int_a^b f(x, t_0)\,\mathrm{d}x \\
&= I(t_0)
\end{aligned}$$

即 $t_0 \in [\alpha, \beta]$ 是 $I(t)$ 的连续点. 由于 $t_0 \in [\alpha, \beta]$ 任意，因此 $I(t)$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数. □

定理 1.5.6(法都(Fatou)引理) 设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的一列非负可测函数，且有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，a. e 于 E，则有

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{n\geqslant 1}\left\{(L)\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x\right\} \tag{1.5-21}$$

证略. □

推论 1.5.2 在定理 1.5.6 的条件下，再加上条件 $\lim\limits_{n\to\infty}(L)\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 有限，则有

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{v\to\infty}(L)\int_E f_v(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.5-22}$$

或

$$(L)\int_E [\varliminf_{v\to\infty} f_v(x)]\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{v\to\infty}(L)\int_E f_v(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.5-23}$$

□

定理 1.5.7(勒维(Levi)引理) 设

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_v(x) \leqslant \cdots$$

是定义在可测集 E 上的一列非负可测函数，且

$$\lim_{v\to\infty} f_v(x) = f(x) \qquad \text{a.e 于 } E$$

则

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{v\to\infty}(L)\int_E f_v(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.5-24}$$

或

$$(L)\int_E [\lim_{v\to\infty} f_v(x)]\,\mathrm{d}x = \lim_{v\to\infty}(L)\int_E f_v(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.5-25}$$

证 由非负可测函数列的极限是非负可测函数，可知 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ 有意义(f 在 E 上有积分). 由 $f_v(x) \leqslant f(x)$ 知

$$(L)\int_E f_v(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.5-26}$$

又因

$$(L)\int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (L)\int_E f_2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \cdots \leqslant (L)\int_E f_v(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \cdots$$

是单调增加数列，故 $\lim_{v\to\infty}\int_E f_v(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛于有限数 a，或发散到 $+\infty$.

当 $\lim_{v\to\infty}(L)\int_E f_v(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ 时，由(1.5－26)式有 $(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$;

当 $\lim_{v\to\infty}(L)\int_E f_v(x)\,\mathrm{d}x = a < +\infty$ 时，由(1.5－26)式及(1.5－22)式有

$$\begin{aligned}(L)\int_E f_v(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant (L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \varliminf_{v\to\infty}(L)\int_E f_v(x)\,\mathrm{d}x = a\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，有

$$\lim_{v\to\infty}(L)\int_E f_v(x)\,\mathrm{d}x = (L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

推论 1.5.3 设 E 可测，$f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} u_v(x)$，a.e 于 E，且 $u_v(x)$ 在 E 上非负可测，则逐项积分公式成立，即

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = (L)\int_E [\sum_{v=1}^{\infty} u_v(x)]\,\mathrm{d}x = \sum_{v=1}^{\infty}(L)\int_E u_v(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.5-27}$$

证 令 $f_v(x) = \sum_{k=1}^{v} u_k(x)$，应用定理 1.5.7 便得结论. □

在以下例中，如果没有特别说明，积分均指勒贝格积分.

例 1.5.2 求 $(R)\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$

分析 若用 Riemann 积分理论来解，应先将被积函数展开成幂级数，当 $0<x<1$ 时，

$$\frac{\ln(1-x)}{x}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n} \tag{1.5-28}$$

再验证级数(1.5-28)在[0，1]上的一致收敛性，显然非一致收敛(在 $x=1$ 点不收敛). 这样对 R 积分不能逐项积分. 下面可应用 Lebesgue 积分理论来求解.

解 当 $x\in(0,1)$时，(1.5-28)式成立.

$$(R)\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x=-(R)\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}x=-(L)\int_{[0,1]}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{x}\,\mathrm{d}x$$

因为 $u_n(x)=\frac{x^{n-1}}{n}$在[0，1]上非负可测，由推论 1.5.3 可知

$$\begin{aligned}-(L)\int_{[0,1]}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}\right)\mathrm{d}x&=-\sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_{[0,1]}\frac{1}{n}x^{n-1}\,\mathrm{d}x\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

例 1.5.3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\,\mathrm{d}x$

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx=0$，$\forall\, x\in[0,1]$，且

$$\left|\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\right|\leqslant\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{2nx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

由于 $\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$收敛，因此$\frac{1}{2\sqrt{x}}$在[0，1]上 L 可积，由控制收敛定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\,\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\,\mathrm{d}x=0$$

例 1.5.4 设 $f(x,t)$在矩形$\{(x,t)\mid a\leqslant x\leqslant b;\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$上有定义，且满足：

(1) $\forall\, t\in[\alpha,\beta]$，$f(x,t)$是$[a,b]$上的 L可积函数；

(2) $\exists\, C>0$，使$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\leqslant C$，$a\leqslant x\leqslant b$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$

证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\,\mathrm{d}x\qquad \alpha<t<\beta$$

证
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x=\lim_{h\to0}\int_a^b\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\,\mathrm{d}x$$

因为$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\leqslant C$，故

$$|f(x,t+h)-f(x,t)|=\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t+\theta h)h\right|\leqslant|h|C$$

$$\left|\frac{f(x,\ t+h)-f(x,\ t)}{h}\right|\leqslant C$$

又因

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x,\ t+h)-f(x,\ t)}{h}=\frac{\partial}{\partial t}f(x,\ t)$$

根据定理 1.5.5 知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,\ t)\,\mathrm{d}x&=\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x,\ t+h)-f(x,\ t)}{h}\,\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\lim_{h\to 0}\frac{f(x,\ t+h)-f(x,\ t)}{h}\,\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,\ t)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

习 题 一

1. 设 $A\subset B$，证明：

(1) $A^C\supset B^C$，$(B\setminus A)\cup A=B$；

(2) $(B\setminus A)\cup A=B$；

(3) $(A\cup B)\cap(B^C)=A\Longleftrightarrow A\cap B=\varnothing$.

2. 证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

3. 设 $\{x_n\}$ 收敛，证明 $\{x_n\}$ 必有界.

4. 设 $\{x_n\}$ 是基本数列，证明 $\{x_n\}$ 存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $|x_{n_k}-x_{n_{k-1}}|<\frac{1}{k}$，$k=1, 2, 3, \cdots$.

5. 证明平面上的坐标为有理数的点的全体构成可列集.

6. 证明有理系数多项式的全体构成可列集.

7. 证明单调函数的不连续点的全体构成可列集.

8. 若 A 是可列集，则由 A 的有限子集所组成的集是可列集.

9. 有理数集 $\mathbf{Q}$ 的所有子集构成的集合是否可列？

10. 试作下列集合间的一一对应：

(1) (a, b) 与 $(0, 1)$；

(2) $(-\infty, +\infty)$ 与 (a, b)；

(3) $(0, 1)$ 与 $[0, 1]$.

11. 设 A 是非空有界数集，证明：存在 $\{x_n\}\subset A$，使 $x_n\to\inf A\ (n\to\infty)$.

12. 设 $\mathbf{Q}_1$ 是区间 $[0, 1]$ 中的有理点集，证明则 $\overline{\mathbf{Q}}_1=[0, 1]$，但 $\mathbf{Q}_1$ 没有内点.

13. 设 $f(x)$ 是直线 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数，$\alpha\in\mathbf{R}^1$ 是任一常数，证明：

(1) $\{x\mid f(x)>\alpha\}$ 是开集；

(2) $\{x\mid f(x)\geqslant\alpha\}$ 是闭集.

14. 通常称集合 A 的内点的全体为 A 的内部，记为 A^0. 试证：A^0 是包含在 A 中的最大开集，而闭包 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集.

15. 若对任何 $\delta>0$，$O(x,\delta)$中总有 A 与 A^C 的点，则称 x 是 A 的边界点，用∂A表示 A 的边界点的全体构成的集合，证明：$A-\partial A$是开集，∂A是闭集.

16. 求区间$[a,b]$的边界及有理数集$\mathbf{Q}$的边界.

17. 证明 $f(x)=\frac{1}{x}$在区间$(a,1)(a>0)$内一致连续；试问 $f(x)$在$(0,1)$内是否一致连续.

18. 证明：如果 $f'(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上有界，则 $f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上一致连续.

19. 设 E_1，E_2 是有界的 Lebesgue 可测集，$E_1\subseteq E_2$，试证

$$m(E_2-E_1)=m(E_2)-m(E_1)$$

20. 设 E_1，E_2 是有界的 Lebesgue 可测集，试证

$$m(E_1\cup E_2)=m(E_1)+m(E_2)-m(E_1\cap E_2)$$

21. 证明函数 $f(x)$在可测集 E上可测的充分必要条件是下列诸条件之一成立：

(1) 集合 $E(f>a)$可测；

(2) 集合 $E(f\leqslant a)$可测；

(3) 集合 $E(f<a)$可测.

22. 如果 A与 B是两个无共同点的可测集，则对任意点集 E，

$$m^*(E\cap(A\cup B))=m^*(E\cap A)+m^*(E\cap B)$$
$$m_*(E\cap(A\cup B))=m_*(E\cap A)+m_*(E\cap B)$$

23. 设 f是 E上的Lebesgue 可测函数，E'是 E的可测子集，证明：$f|_{E'}$是 E'上的可测函数. 这里 $f|_{E'}$是 f在 E'上的限制.

24. 设$\{f_n\}$是可测集 E上一列 Lebesgue 可测函数，$f_n\to f$, a. e 于 E, 证明 f是 E上的 Lebesgue 可测函数.

25. 设 $f_n\overset{m}{\Rightarrow}f$，$g$是几乎处处有限的可测函数，证明：$f_n\cdot g\overset{m}{\Rightarrow}f\cdot g$.

26. 证明可列个可测函数的上确界是可测函数.

27. 若 $f_n(x)\geqslant 0$ 且$\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x\to 0$，则必有 $f_n\overset{m}{\Rightarrow}0$.

28. 试求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}$

29. 设 $E\in L$, f是 E上的函数，若 $f=0$，a. e 于 E,则 f在 E上可积且$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

30. 设 $m(E)<+\infty$，$\{f_n\}$是 E上一列可测函数，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\,\mathrm{d}x=0\iff f_n\overset{m}{\Rightarrow}0$$

第二章 距离空间

2.1 距离空间的定义及例子

2.1.1 距离空间的定义

在微积分中研究了数列及函数的极限，在那里极限定义的基础是 $\mathbf{R}^1$ 中的距离，即 $\forall x, y\in \mathbf{R}^1$，数 $d(x, y)=|x-y|$ 称为 $\mathbf{R}^1$ 中两点 x, y 之间的距离，它具有以下三条性质：

(1) 非负性，即 $d(x, y)=|x-y|\geqslant 0$，$d(x, y)=0\Longleftrightarrow x=y$；

(2) 对称性，即 $d(x, y)=d(y, x)$；

(3) 满足三角不等式，即 $x, y, z\in \mathbf{R}^1$，有 $d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$.

在泛函分析中，需要研究抽象空间中"点列"及"函数列"的极限. 因此，要把 $\mathbf{R}^1$ 中距离的概念推广到一般集合上去，这样就有以下的定义.

定义 2.1.1(距离空间) 设 X 是某些元素组成的集合. 如果对任何 $x, y\in X$，按照一定的法则确定一个非负实数 $d(x, y)$，且满足：

(1) **非负性**：$d(x, y)\geqslant 0$，且 $d(x, y)=0\Longleftrightarrow x=y$；

(2) **对称性**：$d(x, y)=d(y, x)$；

(3) **三角不等式**：$\forall x, y, z\in X$，有

$$d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y)$$

满足条件(1)、(2)、(3)的二元实函数 $d(\cdot,\cdot)$：$X\times X\to\mathbf{R}^1$ 叫做 X 上的距离，X 称为距离空间，记为 (X, d)，也简记为 X. 通常称定义中的条件(1)、(2)、(3)为距离公理.

例 2.1.1 设 X 是实数(或复数)集，$\forall x, y\in X$，定义 $d(x, y)=|x-y|$ 在 X 为实数集时，$|\cdot|$ 表示绝对值；X 是复数集时，$|\cdot|$ 表示复数的模，此时 X 构成距离空间.

例 2.1.2 设 $X=\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1=\mathbf{R}^2=\{(x, y)\mid x\in\mathbf{R}^1, y\in\mathbf{R}^1\}$，定义

$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

这里 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2)$，则 d_1 是 X 上的一个距离.

证 由 x_i, $y_i(i=1, 2)$ 均为实数，则距离公理(1)、(2)容易验证，下验证距离公理(3). $\forall \boldsymbol{z}=(z_1, z_2)\in X$.

$$\begin{aligned}d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= |x_1-y_1|+|x_2-y_2|\\ &=|x_1-z_1+z_1-y_1|+|x_2-z_2+z_2-y_2|\\ &\leqslant(|x_1-z_1|+|x_2-z_2|)+(|z_1-y_1|+|z_2-y_2|)\\ &= d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})+d_1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})\end{aligned}$$

因此，d_1 是 X 上一个距离.

在后面的例中，要用到几个重要的不等式(证明略).

1) Hölder 不等式

(1) $\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}$ (2.1-1)

这里 a_i，b_i 是实数或者复数，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

(2) 设 $|f(x)|^p$，$|g(x)|^q$ 在 E 上 L 可积，则

$$\int_E |f(x)g(x)| \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_E |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} \quad (2.1-2)$$

特别可得 Cauchy 不等式

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2} \quad (2.1-3)$$

$$\int_E |f(x)g(x)| \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E f^2(x) \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_E g^2(x) \mathrm{d}x\right)^{1/2} \quad (2.1-4)$$

2) Minkowski 不等式

(1) $\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^k\right)^{1/k} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^k\right)^{1/k} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^k\right)^{1/k}$ (2.1-5)

这里 $k\geqslant 1$，a_i，b_i 是实数或复数.

(2) $\left(\int_E |f(x)+g(x)|^k \mathrm{d}x\right)^{1/k} \leqslant \left(\int_E |f(x)|^k \mathrm{d}x\right)^{1/k} + \left(\int_E |g(x)|^k \mathrm{d}x\right)^{1/k}$

(2.1-6)

这里 $f(x)$，$g(x)$ 是 E 上的可测函数，$k\geqslant 1$.

例 2.1.3 n 维实(或复)的欧氏空间 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$)是 n 维向量的全体，$\forall\ \boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$)，定义

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

则 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$)是一距离空间.

证 要证 $d(x, y)$ 满足定义 2.1.1 中的条件(1)、(2)、(3)，条件(1)、(2)显然成立，下证三角不等式. 设 $\boldsymbol{z}=(z_1, z_2, \cdots, z_n)\in\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$)，则

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(由公式(2.1-5))} \\ &= d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$)是距离空间.

当 $n=1$ 时，$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^1$，$d(x, y)=|x-y|$；当 $n=2$ 时，$\mathbf{R}^2$ 上 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$. 对照例 2.1.2，集合中的元素相同，但距离不同，因此 $\mathbf{R}^2$ 在两个不同距离 d_1，d 之下构成不同的距离空间. 这说明，在同一集合可以定义不同距离，使其构成不同的距离空间.

例 2.1.4 空间 $l^p(p\geqslant 1)$，l^p 是所有 p 方可和的数列所成的集合，即 $\forall x=\{x_i\}\in l^p$，有 $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<+\infty$. 对任意 $x=\{x_i\}$，$y=\{y_i\}\in l^p$，定义

$$d(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p} \tag{2.1-7}$$

则 l^p 是距离空间.

证 易证定义 2.1.1 中条件(1)、(2)成立. 对于 l^p 中任意元素 $x=\{x_i\}$，$y=\{y_i\}$，$z=\{z_i\}$，有

$$d(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}=\lim_{v\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{v}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\leqslant\lim_{v\to\infty}\left[\left(\sum_{i=1}^{v}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{v}|y_i|^p\right)^{1/p}\right] \quad \text{(Minkowski 不等式)}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{1/p}<+\infty$$

所以 $d(x, y)$ 有意义.

$$d(x, y)=\lim_{v\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{v}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\leqslant\lim_{v\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{v}|x_i-z_i+z_i-y_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\leqslant\lim_{v\to\infty}\left[\left(\sum_{i=1}^{v}|x_i-z_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{v}|z_i-y_i|^p\right)^{1/p}\right]$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-z_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|z_i-y_i|^p\right)^{1/p}$$

$$=d(x, z)+d(z, y)$$

所以 l^p 是距离空间.

例 2.1.5 $L^p[a, b]$表示$[a, b]$上 p 方 L 可积函数的全体，即

$$L^p[a, b]=\left\{x(t)\,\middle|\,\int_a^b|x(t)|^p\,\mathrm{d}t<+\infty\right\}$$

并视几乎处处相等的函数为同一函数，当 x，$y\in L^p[a, b]$时，定义

$$d(x, y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \tag{2.1-8}$$

则 $L^p[a, b]$是一距离空间.

证 因为

$$d(x, y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

$$\leqslant\left(\int_a^b|x(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}+\left(\int_a^b|y(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}<+\infty$$

所以 $d(x, y)$有意义. $d(x, y)$显然满足定义 2.1.1 中的条件(1)、(2)，仅证条件(3).

$\forall z\in L^p[a, b]$，

$$
\begin{aligned}
d(x, y) &= \left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_a^b |x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\int_a^b |x(t)-z(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |z(t)-y(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \\
&= d(x, z)+d(z, y)
\end{aligned}
$$

所以 $L^p[a, b]$是一距离空间.

2.1.2 距离空间中的极限

定义 2.1.2(极限) 设(X, d)是一距离空间,$\{x_n\}$是 X 的一个点列,$x\in X$. 若 $\forall \varepsilon>0$,$\exists N$, 当 $n>N$时,有 $d(x_n, x)<\varepsilon$, 就称点列$\{x_n\}$收敛于 x, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad 或 \quad x_n\to x \quad n\to\infty$$

定理 2.1.1(极限的性质) 设(X, d)是距离空间,$\{x_n\}$是 X 的一个点列.

(1) 若$\{x_n\}$收敛,则其极限唯一;

(2) 若$\{x_n\}$收敛于 x_0,则$\{x_n\}$的任何子列$\{x_{n_k}\}$也收敛于 x_0.

证 (1) 设$\{x_n\}$收敛于 x_0,又收敛于 y_0,那么$\forall \varepsilon>0$,$\exists N_1$,N_2.

当 $n>N_1$ 时有

$$d(x_n, x_0)<\frac{1}{2}\varepsilon$$

当 $n>N_2$ 时有

$$d(x_n, y_0)<\frac{1}{2}\varepsilon$$

当 $n>\max(N_1, N_2)$时,有

$$0\leqslant d(x_0, y_0)\leqslant d(x_0, x_n)+d(x_n, y_0)<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知 $d(x_0, y_0)=0$, 即 $x_0=y_0$.

(2) 设$\{x_n\}$收敛于 x_0,$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的任一子列. $\forall \varepsilon>0$,$\exists N_1$,当 $n>N_1$ 时有 $d(x_n, x_0)<\varepsilon$. 特别地,由 $n_1<n_2<\cdots$, 当 $n_{k_0}>N_1$ 时,只要 $k>k_0$ 有 $n_k>n_{k_0}>N_1$,从而 $d(x_{n_k}, x_0)<\varepsilon$, 即 $x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$. □

例 2.1.6 用 $C[a, b]$表示$[a, b]$上连续函数的全体. $\forall x, y\in C[a, b]$,规定 $d(x, y)=\max\limits_{t\in[a, b]}|x(t)-y(t)|$,则 $d(x, y)$是距离,$C[a, b]$是一距离空间。并且$\{x_n\}\subset C[a, b]$, $x_n\to x_0 \Longleftrightarrow x_n(t)\rightrightarrows x_0(t)(n\to\infty)$.

证 验证 $d(x, y)$为距离时仅验证它满足三角不等式. $\forall z\in C[a, b]$,

$$
\begin{aligned}
d(x, y) &= \max_{t\in[a, b]}|x(t)-y(t)| = \max_{t\in[a, b]}|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)| \\
&\leqslant \max_{t\in[a, b]}|x(t)-z(t)|+\max_{t\in[a, b]}|z(t)-y(t)| \\
&= d(x, z)+d(z, y)
\end{aligned}
$$

故 $C[a, b]$是一距离空间.

再证: $x_n\to x_0(n\to\infty)\Longleftrightarrow x_n(t)\rightrightarrows x_0(t)(n\to\infty)$.

实际上，$x_n \to x_0\ (n\to\infty)$，即 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$ 当 $n>N$ 时有

$$\begin{aligned} d(x_n, x_0) < \varepsilon &\Longleftrightarrow \max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \forall\ t \in [a, b],\ |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow x_n(t) \rightrightarrows x_0(t)\ (n\to\infty). \end{aligned}$$

注 2.1.1 在例 2.1.6 中的集合 $C[a, b]$，还可以赋于距离

$$d_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\,\mathrm{d}t$$

而得到另一距离空间.

例 2.1.7 设 S 表示一切数列的全体，对 $x=\{x_i\}$，$y=\{y_i\}\in S$，定义

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|}$$

则 S 是距离空间.

证 显然级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|}$ 收敛，故 $d(x, y)$ 有意义. 易知 $d(x, y)$ 满足距离公理(1)、(2)，下证距离公理(3). $\forall\ z=\{z_i\}\in S$，要证 $d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y)$，即要证

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i|} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|z_i - y_i|}{1+|z_i - y_i|}$$

这只要证明对每一个 $i=1, 2, 3, \cdots$，有

$$\frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} \leqslant \frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{1+|z_i - y_i|}$$

即可. 为此，考虑函数 $f(t)=\frac{t}{1+t}$，因 $f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}>0$，故 $f(t)$ 单调增，即当 $t_1<t_2$ 时，有

$$\frac{t_1}{1+t_1} \leqslant \frac{t_2}{1+t_2}$$

故

$$\begin{aligned} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} &= \frac{|x_i - z_i + z_i - y_i|}{1+|x_i - z_i + z_i - y_i|} \\ &\leqslant \frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{1+|z_i - y_i|} \end{aligned}$$

还可以进一步证明：在 S 中点列 $x^{(n)} \to x^{(0)} \Longleftrightarrow \{x^{(n)}\}$ 按坐标收敛于 $x^{(0)}$.

证 设点列 $x^{(n)}=\{x_i^{(n)}\}\in S$，$n=1, 2, 3, \cdots$，$x^{(0)}\in S$.

$\Rightarrow$ 设 $x^{(n)}\to x^{(0)}\ (n\to\infty)$，即 $d(x^{(n)}, x^{(0)})\to 0\ (n\to\infty)$，

$$d(x^{(n)}, x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i^{(n)} - x_i^{(0)}|}{1+|x_i^{(n)} - x_i^{(0)}|} \to 0 \qquad n\to\infty$$

由

$$0 \leqslant \frac{|x_i^{(n)} - x_i^{(0)}|}{1+|x_i^{(n)} - x_i^{(0)}|} \leqslant 2^i\, d(x^{(n)}, x^{(0)}) \to 0 \qquad n\to\infty$$

于是 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当 $n>N$ 时，有

$$\frac{|x_i^{(n)} - x_i^{(0)}|}{1+|x_i^{(n)} - x_i^{(0)}|} < \varepsilon$$

从而有

$$|x_i^{(n)} - x_i^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}，\text{即 } x_i^{(n)} \to x_i^{(0)} \qquad n\to\infty$$

$\Leftarrow$ 由 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$ 收敛，故 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ m$，使

$$\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{1}{2}\varepsilon$$

再由对每个 $i=1, 2, 3, \cdots$，有 $x_i^{(n)}\to x_i^{(0)}(n\to\infty)$，故对 $i=1, 2, \cdots, m-1$，存在 $N_i(i=1, 2, 3, \cdots, m-1)$，当 $n>N_i$ 时，有

$$|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

取 $N=\max(N_1, N_2, \cdots, N_{m-1})$，当 $n>N$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|}{1+|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|}\leqslant\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{1+\frac{1}{2}\varepsilon}<\frac{\varepsilon}{2}$$

所以当 $n>N$ 时，有

$$\begin{aligned}d(x^{(n)}, x^{(0)})&=\left(\sum_{i=1}^{m-1}+\sum_{i=m}^{\infty}\right)\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|}{1+|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|}{1+|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|}+\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\varepsilon\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}x^{(n)}=x^{(0)}$$

例 2.1.8(离散距离空间) 对于任何非空集合 X，定义距离如下：$\forall\ x, y\in X$，

$$d(x, y)=\begin{cases}0 & x=y\\1 & x\neq y\end{cases}$$

易证 $d(x, y)$ 满足定义 2.1.1 中的距离公理，因此，(X, d) 是距离空间.

例 2.1.2、例 2.1.6 说明同一集合上可以定义不同的距离；例 2.1.8 说明任何非空集合都可在其上赋予距离，使其成为距离空间.

2.1.3 距离空间中的开集与闭集

定义 2.1.3(点的邻域) 设 X 是一距离空间，$x\in X$，$\delta>0$，称 X 的子集

$$O(x, \delta)=\{y\mid d(x, y)<\delta, y\in X\}$$

是以 x 为中心，以 δ 为半径的**开球**，称

$$\overline{O}(x, \delta)=\{y\mid d(x, y)\leqslant\delta, y\in X\}$$

为**闭球**，开球 $O(x, \delta)$ 也称为 x 的 δ **邻域**.

如果不特别强调邻域的半径，则用 $O(x)$ 表示 x 的邻域.

设 $G\subset X$，$x\in G$，如果存在 $\delta>0$，$O(x, \delta)\subset G$，称 x 为 G 的一个**内点**.

定义 2.1.4(开集) 设 X 是距离空间，$G\subset X$，如果 G 的每个点 x 都是 G 的内点，称 G 为 X 中的**开集**.

定理 2.1.2(开集的性质) 距离空间 X 中的开集具有下列性质：

(1) 空集 $\varnothing$ 与全空间 X 都是开集；

(2) 任意多个开集的并集是开集；

(3) 有限个开集的交集是开集.

证 (1) 因为空集$\varnothing$不含任何点，当然它不含非内点的点，即它的每个点(实际不含有)都是内点，所以$\varnothing$是开集；对于全空间 X，由 x的每个 δ邻域 $O(x, \delta)$都是 X的子集，故 $O(x, \delta)\subset X$，即 X是开集.

(2) 设 $G_i(i\in I$，I是指标集)是 X中任一族开集，令 $G=\bigcup\limits_{i\in I}G_i$，$\forall x\in G$，则 $\exists i_0\in I$，使 $x\in G_{i_0}$，由 G_{i_0}为开集，故 $\exists O(x, \delta)\subset G_{i_0}\subset G$，亦即 x为 G的内点，由 x的任意性，可知 G是开集.

(3) 设 G_1，G_2，…，G_n是 X中的 n个开集，任取 $x\in\bigcap\limits_{i=1}^{n}G_i$，则 $x\in G_i(i=1, 2, \cdots, n)$. 由于 G_i 是开集，则 $\exists O(x, \delta_i)\subset G_i(i=1, 2, \cdots, n)$. 取 $\delta=\min(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)$，则 $O(x, \delta)\subset G_i(i=1, 2, \cdots, n)$，即 $O(x, \delta)\subset\bigcap\limits_{i=1}^{n}G_i$. 由 x的任意性，知$\bigcap\limits_{i=1}^{n}G_i$是开集. □

定义 2.1.5(闭集) 设 X是距离空间，$F\subset X$，如果 $F = X - F$是开集，称 F为 X中的**闭集**.

定理 2.1.3(闭集的性质)

(1) 空集$\varnothing$与全空间 X都是闭集；

(2) 任意多个闭集的交集是闭集；

(3) 有限个闭集的并集是闭集.

证略. □

定义 2.1.6(极限点、闭包) (1) 设 X是距离空间，$A\subset X$，$x_0\in X$，如果 $\forall\delta>0$，在 $O(x_0, \delta)$中含有 A的异于 x_0 的点，则称 x_0 为 A的一个**极限点**(或称为聚点)，A的极限点的全体称为 A的**导集**，记为 A'.

(2) A的极限点的全体与 A的并集，称为 A的**闭包**，记为 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=A'\cup A$.

由定义 2.1.6 可知，x_0 是 A的极限点$\Longleftrightarrow\exists x_n\in A$，$x_n\neq x_0$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = x_0$.

容易得到以下的结论：

(1) $\overline{A}$是闭集(因为 $A'\subset\overline{A}$)；

(2) A是闭集$\Longleftrightarrow A=\overline{A}$；

(3) 闭球 $\overline{O}(x, \delta)$是闭集.

定义 2.1.7 设 X是距离空间，$A\subset X(A\neq\varnothing)$.

(1) $x\in X$称 $d(x, A)=\inf\limits_{y\in A}d(x, y)$为 x到点集 A的距离；

(2) 若存在 $\delta>0$，$x_0\in X$，使 $A\subset\overline{O}(x_0, \delta)$，称 A为 X的有界集；称数 $d(A)=\sup\limits_{x, y\in A}d(x, y)$为 A的直径. 这些概念在以后的论证中会经常用到.

2.1.4 连续映射

定义 2.1.8(连续，一致连续) 设(X_1, d_1)，(X_2, d_2)是两个距离空间，f是这两个空间之间的一个映射 $f: X_1\to X_2$.

(1) $x_0\in X_1$，如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in X_1$，且 $d_1(x, x_0)<\delta$时，有 $d_2(f(x), f(x_0))<\varepsilon$，则称映射 f在 x_0 点连续. 若 f在 X_1 的每一点都连续，则称映射 f在 X_1 上连续.

(2) 如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x, y\in X_1$，当 $d_1(x, y)<\delta$时，有 $d_2(f(x), f(y))<\varepsilon$，

则称映射 f 在 X_1 上一致连续.

由定义 2.1.8 知，如果 f 在 X_1 上一致连续，则 $f(x)$ 在 X_1 上连续，反之不真.

由映射连续的定义，容易得到下面定理.

定理 2.1.4(等价条件) 设 X_1，X_2 是两个距离空间，f：$X_1 \to X_2$，$x_0 \in X_1$，则以下三命题等价：

(1) 映射 f 在 x_0 点连续；

(2) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$f(O(x_0, \delta)) \subset O(f(x_0), \varepsilon)$；

(3) $\forall \{x_n\} \subset X_1$，$x_n \to x_0 (n \to \infty)$，成立

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

证略. □

注 2.1.2 设(X, d)是距离空间，对固定的 $y \in X$，$\forall x \in X$，$d(\cdot, y)$：$X \to \mathbf{R}^1$ 是 X 上的连续函数.

以下定理给出了映射 f 在 X_1 上连续的充要条件.

定理 2.1.5(连续的充要条件) 设 X_1，X_2 是两个距离空间，f：$X_1 \to X_2$，则 f 在 X_1 上连续 $\Longleftrightarrow$ X_2 的任何开子集 G 的原象 $f^{-1}(G) = \{x | f(x) \in G, x \in X_1\}$ 是 X_1 的开集.

证 $\Rightarrow$ 设 f：$X_1 \to X_2$ 是连续映射，$G \subset X_2$ 是开集. 若 f 的原象 $f^{-1}(G) = \{x | f(x) \in G, x \in X_1\} = \varnothing$，而 $\varnothing$ 是开集，得证；若 $f^{-1}(G) \neq \varnothing$，则任取 $x_0 \in f^{-1}(G)$，有 $y_0 = f(x_0) \in G$，因 G 是 X_2 中的开集，则存在 $\varepsilon > 0$，使 $O(y_0, \varepsilon) \subset G$. 由于 f 连续，则存在 $\delta > 0$，使 $\forall x \in X_1$，$d(x, x_0) < \delta$ 时，有 $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$，即 $f(O(x_0, \delta)) \subset O(y_0, \varepsilon) \subset G$，故 $O(x_0, \delta) \subset f^{-1}(G)$，即 x_0 是 $f^{-1}(G)$ 的内点，由 x_0 的任意性可知 $f^{-1}(G)$ 是 X_1 中的开集.

$\Leftarrow$ 如果 f：$X_1 \to X_2$，$\forall G \subset X_2$ 为开集时，$f^{-1}(G)$ 是 X_1 的开集，任取 $x_0 \in X_1$，$\forall \varepsilon > 0$，令 $G = O(f(x_0), \varepsilon)$，则 $x_0 \in f^{-1}(G)$，由 $f^{-1}(G)$ 是 X_1 中的开集，则存在 $\delta > 0$，使 $O(x_0, \delta) \subset f^{-1}(G)$，即 $f(O(x_0, \delta)) \subset G = O(f(x_0), \varepsilon)$，即 f 在 x_0 点连续. 由 $x_0 \in X_1$ 任意，可知 f 在 X_1 上连续. □

定理 2.1.5 中的开集可以换成闭集.

推论 2.1.1 设 X_1，X_2 是两个距离空间，f：$X_1 \to X_2$，则 f 在 X_1 上连续 $\Longleftrightarrow$ X_2 中的任何闭集 F 的原象 $f^{-1}(F)$ 是 X_1 中的闭集. □

2.2 距离空间的可分性与完备性

2.2.1 可分性

定义 2.2.1(稠密集) 设 X 是距离空间，A，$B \subset X$，如果 B 中任何点 x 的任何邻域 $O(x, \delta)$ 中都含有 A 的点，就称 A 在 B 中稠密.

由定义 2.2.1 容易推得下列定理.

定理 2.2.1(稠密的等价条件) 设 A，$B \subset X$，以下三个命题等价.

(1) A在B中稠密；

(2) $\overline{A}\supset B$；

(3) $\forall x\in B$, $\exists\{x_n\}\subset A$, 使$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

证略. □

定理2.2.2(稠密集的性质) 设A, B, $C\subset X$, 若A在B中稠密，B在C中稠密，则A在C中稠密.

证 根据定理2.2.1有$\overline{A}\supset B$, $\overline{B}\supset C$, 而$\overline{B}$是包含B的最小闭集，故$\overline{A}\supset\overline{B}\supset C$, 所以$A$在$C$中稠密. □

例2.2.1 用P表示多项式全体构成的集合，则P在$C[a, b]$中稠密.

证 魏尔斯特拉斯(Weierstrass)逼近定理告诉我们，$\forall f(x)\in C[a, b]$, 必存在多项式列$\{P_n(x)\}\subset P$, 使$P_n(x)\rightrightarrows f(x)(n\to\infty)$，即$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=f$($P_n$按$C[a, b]$中的距离收敛于$f$)，再由定理2.2.1知$P$在$C[a, b]$中稠密.

例2.2.2 设$1\leqslant p<\infty$, $B[a, b]$表示$[a, b]$上的有界可测函数的全体，则$B[a, b]$在$L^p[a, b]$中稠密.

证 对于$x(t)\in L^p[a, b]$，作函数列

$$x_n(t)=\begin{cases}x(t) & |x(t)|\leqslant n\\ 0 & |x(t)|>n\end{cases}$$

于是$x_n(t)$是$[a, b]$上的有界可测函数，而且

$$\int_a^b|x_n(t)-x(t)|^p\,\mathrm{d}t=\int_{E(|x|>n)}|x(t)|^p\,\mathrm{d}t$$

由于$|x(t)|^p\in L^1[a, b]$，由L积分的绝对连续性，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当$E_0\subset E=[a, b]$，$m(E_0)<\delta$时，有

$$\int_{E_0}|x(t)|^p\,\mathrm{d}t<\varepsilon^p$$

因为

$$n^p m(E(|x|>n))\leqslant\int_{E(|x|>n)}|x(t)|^p\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b|x(t)|^p\,\mathrm{d}t$$

所以存在正整数N，当$n>N$时，$m(E(|x|>n))<\delta$, 因而

$$d(x_n, x)=\int_{E(|x|>n)}|x(t)|^p\,\mathrm{d}t<\varepsilon$$

所以$x_n\to x(n\to\infty)$，由定理2.2.1知$B[a, b]$在$L^p[a, b]$中稠密.

例2.2.3 设$1\leqslant p<+\infty$，把$C[a, b]$视为$L^p[a, b]$的子空间，则$C[a, b]$在$L^p[a, b]$中稠密.

证 由例2.2.2知，$B[a, b]$在$L^p[a, b]$中稠密，利用定理2.2.2可知，只要证明按$L^p[a, b]$中的距离，$C[a, b]$在$B[a, b]$中稠密，即得$C[a, b]$在$L^p[a, b]$中稠密.

$\forall x(t)\in B[a, b]$，$\|x\|\leqslant K$. 记$E=[a, b]$，$\forall\varepsilon>0$，由鲁金定理，对于正数$\delta=\left(\dfrac{\varepsilon}{2K}\right)^p$，存在$y(t)\in C[a, b]$，使得

$$m(E(x(t)\neq y(t)))<\delta$$

不妨设$\|y\|\leqslant K$，否则，把y换成连续函数$\max(\min(y(t), K), -K)$即可，记

$E_0=E(x(t)\neq y(t))$. 于是

$$\int_a^b |x(t)-y(t)|^p \mathrm{d}t=\int_{E_0} |x(t)-y(t)|^p \mathrm{d}t\leqslant (2K)^p m(E_0)<\varepsilon^p$$

这就是说 $d(x,y)<\varepsilon$, 由定义可知 $C[a,b]$在 $B[a,b]$中按 $L^p[a,b]$中的距离是稠密的.

定义 2.2.2(可分性) 设 X是距离空间, $A\subset X$, 如果存在点列$\{x_n\}\subset A$, 使$\{x_n\}$在 A 中稠密, 就称 A是**可分点集**(也称**可析点集**). 当 X本身是可分点集时, 称 X是**可分的距离空间**.

例 2.2.4 $\mathbf{R}^n$ 是可分的距离空间, 这是因为坐标取有理数的点的全体构成 $\mathbf{R}^n$ 的可列稠密子集.

例 2.2.5 $C[a,b]$是可分的, 这是因为多项式全体 P在 $C[a,b]$中稠密, 而系数为有理数的多项式全体 P_0 在 P中稠密, $P_0\subset P\subset C[a,b]$, P_0 是可列集, 故 $C[a,b]$可分.

例 2.2.6 设 $X=[0,1]$, $\forall\, x,y\in X$, 定义

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$$

则(X,d)是一距离空间, 但(X,d)是不可分的.

证 仅证(X,d)不可分. 用反证法. 如果(X,d)是可分的, 则必有可列子集$\{x_n\}\subset X$ 在 X中稠密, 又 $X=[0,1]$是不可列集, 故$\exists\, x^*\in X$, $x^*\neq x_n$, $n=1,2,3,\cdots$. 取 $\delta=\dfrac{1}{3}$, 则在 $O(x^*,\delta)$中不含$\{x_n\}$的点, 这与$\{x_n\}$在 X中稠密相矛盾.

例 2.2.7 $l^p(p\geqslant 1)$是可分的距离空间.

证 令 $A=\{y|\, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,0,0,\cdots),\ y_i$ 为有理数, n为自然数, $y\in l^p\}$.

显然, A是 l^p 的可列子集. 对任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^p$, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, N$, 当 $n>N$时, 有

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p<\frac{1}{2}\varepsilon^p \tag{2.2-1}$$

由于有理数集 $\mathbf{Q}$ 在实数集 $\mathbf{R}^1$ 中稠密, 对每个 x_i, 可以找出 $y_i\in\mathbf{Q}$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,0,0,\cdots)\in A$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|^p<\frac{1}{2}\varepsilon^p \tag{2.2-2}$$

于是由(2.2-1)、(2.2-2)式有

$$(d(x,y))^p=\sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|^p+\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p<\varepsilon^p$$

亦即 $d(x,y)<\varepsilon$, 说明 A在 l^p 中稠密, 故 l^p 可分.

例 2.2.8 $L^p[a,b]$是可分的距离空间.

证 由例 2.2.3 知, $C[a,b]$按 $L^p[a,b]$中的距离在 $L[a,b]$中稠密, 如果能够证明有理系数多项式全体 P_0 按 $L^p[a,b]$中的距离在 $C[a,b]$中稠密, 则由定理 2.2.2 知, P_0 在 $L^p[a,b]$中稠密, 即 $L^p[a,b]$可分.

在例 2.2.5 中已证 P_0 按 $C[a,b]$中的距离, P_0 在 $C[a,b]$中稠密, $\forall\, x\in C[a,b]$ 及 $\varepsilon>0$, $\exists\, p\in P_0$, 使 $d(x,p)=\max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)-p(t)|<\dfrac{\varepsilon}{(b-a)^{1/p}}$. 于是按 $L^p[a,b]$ 中距

离有

$$d^p(x, p) = \int_a^b |x(t) - p(t)|^p \mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon^p}{b-a}(b-a) = \varepsilon^p$$

即 $d(x, p) < \varepsilon$ 这就是说按 $L^p[a, b]$中距离，P_1 在 $C[a, b]$中稠密，故 $L^p[a, b]$可分.

2.2.2 完备性

在微积分中，数列$\{x_n\}$收敛$\Longleftrightarrow\{x_n\}$是基本列(或 Cauchy 列)，它有六个相互等价的命题，这些命题反映了实数的完备性(连续性). 现在将这一概念推广到距离空间.

定义 2.2.3(基本列) 设(X, d)是一距离空间，$\{x_n\}$是 X中的点列，如果$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n, m>N$时，有

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \tag{2.2-3}$$

就称$\{x_n\}$为**基本列**(或 **Cauchy 列**).

定理 2.2.3(基本列的性质) (X, d)中的基本列有如下的性质：

(1) 若点列$\{x_n\}$收敛，则$\{x_n\}$是基本列；

(2) 若点列$\{x_n\}$是基本列，则$\{x_n\}$有界；

(3) 若基本列含有收敛子列，则该基本列收敛，其极限为该子列的极限.

证 结论(1)、(2)易证，证明略. 仅证结论(3). 设$\{x_n\}$是一基本列，且有一收敛子列$\{x_{n_k}\}$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$，即$\forall \varepsilon>0$，$\exists N_1$，当 $k>N_1$ 时

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

由于$\{x_n\}$是基本列，故$\exists N_2$，当 $m, n>N_2$ 时有

$$d(x_m, x_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

令 $N=\max(N_1, N_2)$，当 $n>N$及任一 $k>N$，有

$$d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$$

因此有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ □

注 2.2.1 定理 2.2.3(1)的逆不成立. 举反例如下：$X=(0, 1)$，$\forall x, y\in X$，$d(x, y) = |x-y|$，点列$\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$是 X中的基本列，$\{x_n\}$在 X中不收敛.

在一个距离空间中，如果它的每一个基本列都收敛，则这个空间在分析中特别有意义. 因为在此空间中，不必具体找出序列的极限，就可以判别它是否收敛. 一个空间，如果其中的每个基本列都有极限(因而是收敛的)，就叫做**完备空间**.

定义 2.2.4(完备空间) 如果距离空间 X中的每一基本列都收敛于 X中的点，就称 X为完备的距离空间.

例 2.2.9 (1) 设 X是坐标平面上有限个点，距离按通常的定义，则 X是完备的距离空间；

(2) 离散的距离空间是完备的.

证 (1) 因为 X中的基本列只能是“常驻点列”. 即$\{x_n\}$中元素列出有：

$$x_1, x_2, \cdots, x_r, x_k, \cdots, x_k, \cdots$$

故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，$x_0 \in X$，因此 X完备. 由此可知，完备不同于"无空隙".

(2) 因为离散空间中的基本列$\{x_n\}$的元素除有限个不同外都相同，从而收敛.

例 2.2.10 $\mathbf{R}^n$ 是完备的距离空间.

证 $\mathbf{R}^n$ 上的距离取为(欧氏距离)：$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$. 在 $\mathbf{R}^n$ 中任取一基本列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$，$\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$.

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $k, j > N$时，

$$d(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{x}^{(j)}) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_i^{(j)}|^2\right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \tag{2.2-4}$$

因此，对于 $i = 1, 2, \cdots, n$，当 $k, j > N$时，有

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(j)}| < \varepsilon$$

这就是说，对于固定的 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$，数列$\{x_i^{(k)}\}$是一基本列，知其收敛，设$\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$，令 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$，在(2.2-4)式中，令 $j \to \infty$且当 $k > N$时，有

$$d(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{x}) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon$$

故证得 $\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x}(k \to \infty)$，所以 $\mathbf{R}^n$ 是完备的.

定理 2.2.4 $C[a, b]$是完备的距离空间.

证 $C[a, b]$中的距离为 $d(x, y) = \max\limits_{t\in[a, b]} |x(t) - y(t)|$.

设$\{x_n\} \subset C[a, b]$是基本点列. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n, m > N$时，有

$$d(x_m, x_n) = \max_{t\in[a, b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \tag{2.2-5}$$

故对 $\forall t \in [a, b]$，有

$$|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \tag{2.2-6}$$

(2.2-6)式说明数列$\{x_n(t)\}$是基本数列，从而 $\exists x(t)$，有

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$$

在(2.2-5)式中，令 $m \to \infty$，且 $n > N$，有

$$d(x, x_n) = \max_{t\in[a, b]} |x(t) - x_n(t)| \leqslant \varepsilon \tag{2.2-7}$$

(2.2-7)式说明 $x_n(t) \rightrightarrows x(t)$，从而 $x(t) \in C[a, b]$，这就证明了 $C[a, b]$的完备性. □

例 2.2.11 在 $C[0, 1]$上定义距离

$$d_1(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| \, \mathrm{d}t \tag{2.2-8}$$

则 $C[0, 1]$是不完备的距离空间.

证 设

$$x_m(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2} \\ m\left(t - \dfrac{1}{2}\right) & \dfrac{1}{2} \leqslant t < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{m} \\ 1 & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{m} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

则 $x_m \in C[0, 1]$，$m = 1, 2, 3, \cdots$. 因为 $d(x_m, x_n)$是图 2-1 中右图中三角形的面积.

$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>\dfrac{1}{\varepsilon}$，当 m，$n>N$时，

$$d(x_m,\ x_n)=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|<\varepsilon$$

因此，$\{x_m\}$是 $C[0,1]$中的基本列.

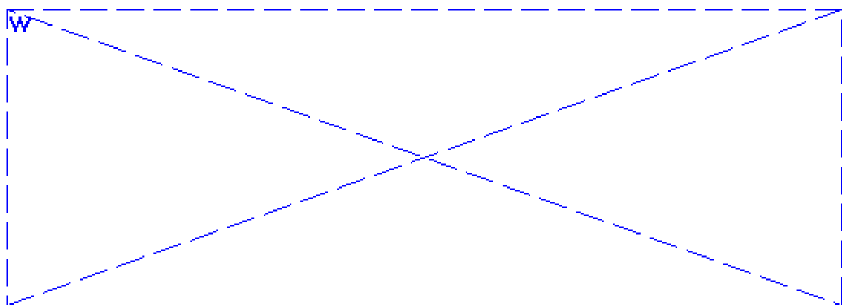


图 2－1

下证此基本列在 $C[0,1]$中不收敛. 若 $\exists\ x(t)\in C[0,1]$，使 $d(x_m,\ x)\to 0\ (m\to\infty)$. 由于

$$d(x_m,\ x)=\int_0^1|x_m(t)-x(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{2}}|x(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}|x_m(t)-x(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^1|1-x(t)|\,\mathrm{d}t \tag{2.2-9}$$

而(2.2－9)式右边的三个积分均非负，因此，由 $d(x_m,\ x)\to 0$，推得每个积分均趋于零. 因为假设 $x(t)$连续，则有

$$x(t)=\begin{cases}0 & t\in\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right)\\ 1 & t\in\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]\end{cases}$$

对于连续函数，这是不可能的. 故$\{x_m\}$在 $C[0,1]$中不收敛，从而 $C[0,1]$在距离 d 之下非完备.

例 2.2.12 空间 l^p 是完备的距离空间($1\leqslant p<+\infty$).

证 设$\{x^{(m)}\}$是 l^p 中的基本列，这里 $x^{(m)}=(x_1^{(m)},\ x_2^{(m)},\ \cdots,\ x_i^{(m)},\ \cdots)$，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当 n，$m>N$时，有

$$d(x^{(m)},\ x^{(n)})=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|^p\right)^{1/p}<\varepsilon \tag{2.2-10}$$

对于每个 $i\ (i=1,2,3,\cdots)$，当 m，$n>N$时，有

$$|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|<\varepsilon \tag{2.2-11}$$

对于固定的 i，由(2.2－11)式知$(x_i^{(1)},\ x_i^{(2)},\ \cdots,\ x_i^{(m)},\ \cdots)$是 $\mathbf{R}^1$ 中的基本数列. 因 $\mathbf{R}^1$ 完备，所以此数列收敛，可设 $\lim\limits_{m\to\infty}x_i^{(m)}=x_i$. 利用这些极限，定义 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_i,\ \cdots)$. 下证 $x\in l^p$，且 $x^{(m)}\to x\ (m\to\infty)$.

由(2.2-10)式，对任何自然数 $k(k=1,2,3,\cdots)$，当 $m, n>N$时，有

$$\sum_{i=1}^{k}|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|^p<\varepsilon^p$$

令 $n\to\infty$，当 $m>N$时，有 $\sum_{i=1}^{k}|x_i^{(m)}-x_i|^p\leqslant\varepsilon^p$，再令 $k\to+\infty$，当 $m>N$时，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(m)}-x_i|^p\leqslant\varepsilon^p \tag{2.2-12}$$

由(2.2-12)式知 $x^{(m)}-x\in l^p(x^{(m)}-x=(x_1^{(m)}-x_1, x_2^{(m)}-x_2,\cdots))$. 因为 $x^{(m)}\in l^p$，由 Minkowski 不等式知，$x=x^{(m)}+(x-x^{(m)})\in l^p$. 再由(2.2-12)式，$d(x^{(m)}, x)\leqslant\varepsilon$，即 $x^{(m)}\to x(m\to\infty)$. 因为$\{x^{(m)}\}$是 l^p 中的任意基本列，从而 l^p 是完备的距离空间.

更一般地，可以证明下述定理.

定理 2.2.5 $L^p[a, b]$是完备的距离空间，这里 $p\geqslant 1$，$x, y\in L^p[a, b]$，$d(x, y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}$.

证明过于复杂，从略. □

由于实数的完备性，故实数集中有区间套定理. 在完备的距离空间中，也有类似的性质，写成下述定理.

定理 2.2.6(闭球套定理) 设 X是完备的距离空间，$B_n=\bar{O}(x_n, \varepsilon_n)$是一套闭球：

$$B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_n\supset\cdots$$

如果球的半径 $\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$，则存在唯一的点 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$.

证 先证球心所组成的点列$\{x_n\}$是 X中的基本列. 这是因为当 $m>n$时，$x_m\in B_m\subset B_n$，得到

$$d(x_m, x_n)\leqslant\varepsilon_n \tag{2.2-13}$$

$\forall\varepsilon>0$，取 N，当 $n>N$时，$\varepsilon_n<\varepsilon$，于是当 $m>n>N$时，

$$d(x_m, x_n)<\varepsilon$$

所以$\{x_n\}$是基本列. 由于 X是完备的距离空间，故存在 $x\in X$，使$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 在(2.2-13)式中令 $m\to\infty$，有

$$d(x, x_n)\leqslant\varepsilon_n\qquad n=1,2,3,\cdots$$

即 $x\in B_n$，$n=1,2,3,\cdots$，因此 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$.

再证唯一性. 设 $\exists\, y\in X$，满足 $y\in\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$，那么

$$d(y, x_n)\leqslant\varepsilon_n$$

令 $n\to\infty$，有 $d(y, x)=\lim\limits_{n\to\infty}d(y, x_n)=0$，(注意到距离为连续函数)，所以 $y=x$，即$\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$中只有一个点. □

2.2.3 距离空间的完备化

如前所述，实直线在欧氏距离 $d(x, y)=|x-y|$下是完备的距离空间，有理数集 **Q** 在同样的距离之下是不完备的. 但 **Q** 在 $\mathbf{R}^1$ 中是稠密的，如果把 $\mathbf{R}^1$ 看作稠密集 **Q** 的扩充，则

扩充后其具有完备性．经研究发现，在抽象的距离空间中也有这种现象．如 $C[a, b]$在 $d_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| \mathrm{d}t$之下是不完备的．对于这种不完备的距离空间，设法把它们扩充成完备的距离空间，将具有重要的意义．下面对此作一简单介绍．

定义 2.2.5(等距映射) 设(X_1, d_1)，(X_2, d_2)是距离空间，如果存在 X_1 到 X_2 的一一映射 T，使得$\forall x, y \in X_1$，有

$$d_2(Tx, Ty) = d_1(x, y) \tag{2.2-14}$$

则称 X_1 与 X_2 是**等距空间**(或称**等距同构空间**)，称 T为**等距映射**.

注 2.2.2 从定义 2.2.5 可以看出，从距离的角度去看等距的距离空间，至多是两个空间元素的属性不同，它们可以看成是同一抽象空间的两个不同的模型．另外，距离空间中元素之间没有运算关系，涉及(X_1, d_1)的数学命题，通过等距映射 T，使之在(X_2, d_2)中照样成立，从而把(X_1, d_1)与(X_2, d_2)可以不加区别而看作同一空间．

定义 2.2.6(完备化空间) 设 X是一距离空间，Y是一完备的距离空间，若 Y中含有与 X等距且在 Y中稠密的子集 Y'，就称 Y是 X的一个完备化空间．

关于距离空间的完备化问题，有以下定理．

定理 2.2.7(完备化空间的存在与唯一性) 每一距离空间 X，必存在它的完备化距离空间 Y，并且在等距同构的意义下，Y是唯一的．

证 (1) 因证明过于复杂，仅给出完备化空间存在性的证明概要．

第一步：把 X中的一切基本列$\{x_n\}$的全体(非空)进行分类：如果两个基本列$\{x_n\}$与$\{x_n'\}$满足条件

$$d(x_n, x_n') \to 0 \qquad n \to \infty$$

则称$\{x_n\}$，$\{x_n'\}$属于同一类．用 $\tilde{x}$，$\tilde{y}$，…，表示各种不同的类，把这些类的全体看作一个集合，记为 Y，在 Y中定义距离如下：

$$d_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \tag{2.2-15}$$

这里$\{x_n\} \in \tilde{x}$，$\{y_n\} \in \tilde{y}$．分别称$\{x_n\}$，$\{y_n\}$为 $\tilde{x}$，$\tilde{y}$中的代表元．

第二步：验证(2.2-15)式定义的 d_1 满足距离的三条公理．且证明(2.2-15)与 $\tilde{x}$，$\tilde{y}$的代表元的选取无关．

第三步：再证 Y是完备的．

(2) 完备化空间的唯一性(等距意义下)：设 X有两个完备化空间 Y_1，Y_2．因 Y_1 中有稠密子集 Y_1'与 X等距，Y_2 中有稠密子集 Y_2'与 X等距，所以$\forall x \in Y_1$，$\exists x_n' \in Y_1'$，使 $x_n' \to x$，与 x_n'对应地有 $x_n \in X(T_1 x_n = x_n')$，且易证$\{x_n\}$是 X中的基本列．对应 x_n有 $y_n' \in Y_2' \subset Y_2$，$\{y_n'\}$是 Y_2 中的基本列．因 Y_2 完备，故有 $y_n' \to y \in Y_2$，即 Y_2 中有唯一的 y与 Y_1 中的 x对应．同样，$\forall y \in Y_2$，Y_1 中有唯一的 x与 y对应，即$\exists Y_1$ 与 Y_2 之间的一一映射 T，不难证明 T是等距的． □

由于 $C[a, b]$ 在 $d_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| \mathrm{d}t$下是不完备的，而 $C[a, b] \subset L^1[a, b]$，且 $C[a, b]$在 $L^1[a, b]$中稠密，用完备化的观点来看，$L^1[a, b]$是 $C[a, b]$在 d_1 之下的完备化空间．

2.3　距离空间的列紧性与紧性

2.3.1　列紧性

在微积分中，闭区间上连续函数性质（如最大值最小值性质，一致连续性等）的证明，基于 $\mathbf{R}^1$ 中闭区间的一个重要特性——紧性. 所谓紧性就是有界数列必有收敛子列.

下面指出：在一般的距离空间中，这种性质并不保持. 例如：$L^2[-\pi, \pi]$ 中的点列 $\{x_n\}=\{\sin nt\}$，由于

$$d(x_n, 0)=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\sin nt-0|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}$$

故 $\{x_n\}$ 是 $L^2[-\pi, \pi]$ 中的有界点列，但

$$d(x_n, x_m)=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\sin nt-\sin mt|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2\pi}\qquad m\neq n$$

所以 $\{x_n\}$ 无收敛子列.

为了在距离空间中也能像微积分那样来讨论问题，首先要把 $\mathbf{R}^1$ 中紧性的概念推广到距离空间.

定义 2.3.1（列紧集，紧集，紧空间）　设 X 是距离空间，$A\subset X$.

（1）如果 A 中的任何点列都有收敛于 X 的子列，就称 A 为**列紧集**（也称**致密集**）；

（2）如果 A 是列紧集，且 A 也是闭集，就称 A 为**紧集**；

（3）如果 X 本身是列紧集（必是闭集），称 X 为**紧空间**.

定理 2.3.1（列紧集的性质）　设 X 是距离空间.

（1）X 中的任何有限集必是列紧集，且是紧集；

（2）列紧集必是有界集，反之不真；

（3）列紧集的子集是列紧集.

证　仅证(2). (1)、(3)的证明留给读者.

设 $A\subset X$ 是列紧集，如果 A 无界，取 $x_1\in A$ 固定，存在 $x_2\in A$，使 $d(x_1, x_2)\geqslant 1$；对于 x_1，x_2，必存在 $x_3\in A$，使 $d(x_1, x_3)\geqslant 1$，$d(x_2, x_3)\geqslant 1$；再取 x_4，使 $d(x_1, x_4)\geqslant 1$，$d(x_2, x_4)\geqslant 1$，$d(x_3, x_4)\geqslant 1$；……继续作下去，得点列 $\{x_n\}\subset A$，$d(x_i, x_j)\geqslant 1$，$i\neq j$，点列 $\{x_n\}$ 无收敛子列，A 不是列紧集，这与假设相矛盾，故 A 是有界集.

反过来，A 是有界集，A 未必列紧. 反例，取 $L^2[-\pi, \pi]$ 上闭球

$$\bar{B}=\bar{O}(0, \sqrt{\pi})$$

显然 $\bar{B}$ 是有界集，而不是列紧集. □

由定义 2.3.1 及定理 2.3.1 易知，$\mathbf{R}^1$ 中的区间 $(0, 1)$ 是列紧集，而不是紧集，$\mathbf{R}^1$ 中的自然数集 $\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 不是列紧集（因无界），而 $[0, 1]$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的紧集.

推论 2.3.1　（1）紧空间是有界空间；

（2）紧空间是完备空间. □

定理 2.3.2 在 $\mathbf{R}^n$ 中，$A\subset\mathbf{R}^n$.

(1) A 是列紧集 $\Longleftrightarrow$ A 是有界集；

(2) A 是紧集 $\Longleftrightarrow$ A 是有界闭集.

证 (1) 仅证 $\Leftarrow$(充分性). 如果 A 是有限集，则 A 是列紧集；如果 A 是无限的有界集，只要证明 A 有极限点就够了. 记 $\mathbf{R}^n$ 中的点集

$$I=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid |x_i-x_i^*|\leqslant\frac{1}{2}a,\ i=1,2,\cdots,n,\ a>0\}$$

为 n 维立方体，这里 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$，$\boldsymbol{x}^*$ 为立方体 I 的中心，a 为边长. 容易看到，如果 A 有界，则存在 $a>0$，使 $A\subset I$.

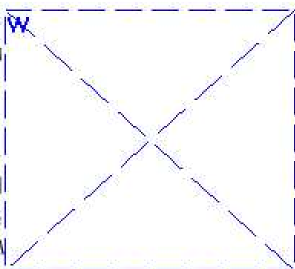


图 2-2

设有界无限集 A 包含在边长为 a 的某个 n 维立方体 I_1 之内，将 I_1 等分成 $m=2^n$ 个 n 维立方体：I_{11}，I_{12}，$\cdots$，I_{1m}，如图 2-2 所示，表示 $n=2$ 的情况. 由于 A 是无限点集，则必有某个 I_{1k} 含有 A 的无限多个点. 记 I_{1k} 为 I_2. 再等分 I_2 为 m 个小立方体：I_{21}，I_{22}，$\cdots$，I_{2m}，同样有某个 I_{2j} 含有 A 的无限多个点. 继续作下去，得一立方体序列

$$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots\supset I_k\supset\cdots$$

且每 I_k 中含有 A 的无限多个点，而 I_k 包含在一个半径为 $(\sqrt{n}a)/2^{k+1}$ 的闭球中. 当 $k\to+\infty$ 时，半径趋于零. 则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}I_k=\{x_0\}$（闭球套定理）唯一点. $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 充分大的 k，使 $I_k\subset O(x_0,\varepsilon)$，即 $O(x_0,\varepsilon)$ 中含有 A 的无限多个点，从而 x_0 是 A 的极限点.

(2) 结论显然成立. □

定理 2.3.3(最大值、最小值定理) 设 A 是距离空间 X 中的紧集，f 是定义在 A 上的实值连续函数(称泛函)，则 f 在 A 上取得最大值与最小值.

证 先证：若 $A\subset X$，A 为紧集，$f(x)$ 为 A 上的连续函数，则 $E=f(A)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的紧集(有界闭集). 实际上，$\forall\{y_n\}\subset E=f(A)$，则 $\exists\{x_n\}\subset A$，有 $y_n=f(x_n)$，$n=1,2,3,\cdots$. 由 A 是紧集，故 $\{x_n\}$ 存在收敛于 $x_0\in A$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\to x_0\in A$. 由 $f(x)$ 连续，有

$$\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)\in E$$

故 $\{y_n\}$ 有收敛于 E 的子列 $\{y_{n_k}\}$，即 $E=f(A)$ 是紧集.

再证：$f(x)$ 在 A 上有最大值与最小值. 由于 $E=f(A)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 中紧，故 E 在 $\mathbf{R}^1$ 中有界，故 $\sup E=\sup\limits_{x\in A}f(x)$ 存在，记为 M. 由上确界的定义知，$\forall n$，$\exists x_n\in A$，使 $f(x_n)>\sup\limits_{x\in A}f(x)-\frac{1}{n}$，即

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant M<M+\frac{1}{n}$$

再由 A 为紧集，则 $\exists\{x_{n_j}\}\subset\{x_n\}$，使 $x_{n_j}\to x^*\in A\ (j\to\infty)$.

$$M-\frac{1}{n_j}<f(x_{n_j})<M+\frac{1}{n_j}$$

令 $j\to\infty$，有 $f(x^*)=M$，则 M 为 $f(x)$ 在 A 上的最大值.

同理可证存在 $x_* \in A$ 使 $f(x_*) = m = \inf\limits_{x\in A}(x)$，$m$ 为 $f(x)$ 在 A 上的最小值. □

2.3.2 全有界性

与列紧性密切相关的概念是全有界性.

定义 2.3.2(ε网) 设 X 是距离空间，A，$B \subset X$，给定 $\varepsilon > 0$，如果对于 A 中的任何点 x，必有 B 中的点 x'，使 $d(x, x') < \varepsilon$，则称 B 是 A 的一个 **ε网**.

例如，全体整数集是全体有理数集的 0.6 网，平面上坐标为整数的点是 $\mathbf{R}^2$ 的 0.8 网.

定义 2.3.3(全有界集) 设 $A \subset X$，如果 $\forall \varepsilon > 0$，A 总存在**有限的 ε 网**，则称 A 是 X 中的**全有界集**.

定理 2.3.4(全有界集的特质) 设 X 是距离空间，$A \subset X$，

(1) 若 A 是全有界集，则 A 是有界集；

(2) 若 A 是全有界集，则 A 是可分的.

证 (1) 若 A 是全有界集，则取 $\varepsilon=1$，存在 x_1，x_2，…，$x_m \in X$，$\{x_i, i=1, 2, \cdots, m\}$ 是 A 的 ε 网，$A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} O(x_i, 1)$. 取 $R = 1 + \max\limits_{2\leqslant i\leqslant m} d(x_1, x_i)$，则 $A \subset O(x_1, R)$，即 A 是有界集.

(2) 若 A 是全有界集，只要证明 A 有可列的稠密子集. 为此，取 $\varepsilon_n = 1/n$，记 A 的有限 ε_n 网为 B_n，$n=1, 2, 3, \cdots$. 现证 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ 是 A 的稠密子集. $\forall x \in A$，$\forall \delta > 0$，取 $1/n_0 < \delta$，因 B_{n_0} 是 A 的 $1/n_0$ 网，故 $\exists x_{n_0} \in B_{n_0} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$，使 $d(x, x_{n_0}) < 1/n_0 < \delta$，从而 $x_{n_0} \in O(x, \delta)$，即 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ 在 A 中稠密. 显见 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ 是(至多)可列集，从而 A 可分. □

定理 2.3.5(全有界的充要条件) 设 $A \subset X$，则 A 全有界 $\Longleftrightarrow$ A 中的任何点列必有基本子列.

证 $\Rightarrow$ 设 $\{x_n\}$ 是 A 的任一点列，取 $\varepsilon_k = 1/k$，$k=1, 2, 3, \cdots$，因 A 是全有界集，故 A 存在有限 ε_k 网，记为 B_k，$k=1, 2, 3, \cdots$.

以 B_1(有限集)的各点为中心，以 ε_1 为半径作开球，这有限个开球覆盖了 A，从而覆盖了 $\{x_n\}$. 于是至少有一个球(记为 S_1)中含有 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_k^{(1)}\}(\subset S_1)$.

同样，以 B_2 中的各点为中心，以 ε_2 为半径作开球(有限个)，则这有限个开球覆盖了 $\{x_k^{(1)}\}$，于是这些球中至少有一个(记为 S_2)含有 $\{x_k^{(1)}\}$ 的一个子列 $\{x_k^{(2)}\}(\subset S_2)$. 依此可得一列点列：

$$
\begin{gathered}
x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)},\ \cdots,\ x_k^{(1)},\ \cdots \\
x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ x_3^{(2)},\ \cdots,\ x_k^{(2)},\ \cdots \\
\cdots \\
x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ x_3^{(k)},\ \cdots,\ x_k^{(k)},\ \cdots
\end{gathered}
$$

且每一点列是前一点列的子列. 取对角线上的元素作为 $\{x_n\}$ 的子列，则 $\{x_k^{(k)}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的基本子列. 实际上，对 $\forall \varepsilon < 0$，取 K，使 $\varepsilon_K = \dfrac{1}{K} < \dfrac{\varepsilon}{2}$，当 $k > K$ 时，对任何自然数 p，有 $x_{k+p}^{(k+p)} \in S_k$(由于后一点列是前一点列的子列)，故，$k > K$ 时，有

$$d(x_{k+p}^{(k+p)}, x_k^{(k)}) \leqslant d(x_{k+p}^{(k+p)}, x_k^{*}) + d(x_k^{*}, x_k^{(k)})$$

$$<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

这里 x_k^* 是 S_k 的中心. 即$\{x_k^{(k)}\}$是$\{x_n\}$的基本子列.

$\Leftarrow$ 用反证法，若 A不是全有界的，则存在 $\varepsilon_0>0$，A没有有限的 ε_0 网. 取 $x_1\in A$，再取 $x_2\in A$，使$d(x_1, x_2)\geqslant\varepsilon_0$（这样的 x_2 存在，否则$\{x_1\}$为 A的 ε_0 网）. 再取 $x_3\in A$，使$d(x_1, x_3)\geqslant\varepsilon_0$，$d(x_2, x_3)\geqslant\varepsilon_0$（这样的 x_3 存在）. ……，得$\{x_n\}\subset A$，而$\{x_n\}$没有基本子列，这与 A的任一点列有基本子列矛盾，故 A是全有界集. □

推论 2.3.2(豪斯道夫(Hausdorff)) (1) 距离空间中的列紧集必是全有界集；

(2) 若 X是完备的距离空间，$A\subset X$，A列紧$\Longleftrightarrow A$全有界.

证 (1) 因为列紧集 A中的任一点列都有收敛子列，故它必是基本子列. 由定理 2.3.5 知 A是全有界集.

(2) $\Rightarrow$ 由(1)的结论可知.

$\Leftarrow$ $\forall\{x_n\}\subset A$，因 A全有界，故$\{x_n\}$有基本子列$\{x_{n_k}\}$(由定理 2.3.5). 又因 X完备知$\{x_{n_k}\}$在 X中收敛，可知 A是列紧集. □

2.3.3 几个具体空间中点集列紧的等价条件

应用最多的空间是 $\mathbf{R}^n$，$C[a, b]$，及 $l^p(p\geqslant1)$，定理 2.3.2 给出了 $\mathbf{R}^n$ 中的点集紧的充要条件，下面给出 $C[a, b]$，l^p 中点集列紧的等价条件.

定理 2.3.6 ($C[a, b]$中点集列紧的充要条件) 设 $A\subset C[a, b]$，则 A列紧$\Longleftrightarrow$以下两条成立.

(1) **A一致有界**. $\exists M>0$，$\forall x\in A$，有$|x(t)|\leqslant M$，对任何 $t\in[a, b]$都成立；

(2) **A等度连续**. $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$(δ与 t及 x无关)，当 $t_1, t_2\in[a, b]$，$|t_1-t_2|<\delta$时，$\forall x\in A$，有

$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon \tag{2.3-1}$$

证 $\Rightarrow$ 由于 A列紧，故 A是 $C[a, b]$中的有界集，即存在 $M>0$，$\forall x\in A$，有

$$d(0, x)=\max_{t\in[a, b]}|x(t)|\leqslant M$$

从而对一切 $t\in[a, b]$，有$|x(t)|\leqslant M$，即 A一致有界，从而条件(1)成立.

再由 A列紧可推得 A是全有界的，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists A$的有限$\frac{1}{3}\varepsilon$网 $x_1, x_2, \cdots, x_N\in A$，使对任何 $x\in A$，存在 $x_k(1\leqslant k\leqslant N)$，满足 $d(x, x_k)<\frac{1}{3}\varepsilon$，从而当 $t\in[a, b]$，有

$$|x(t)-x_k(t)|<\frac{1}{3}\varepsilon \tag{2.3-2}$$

又因为 $x_k(t)$在$[a, b]$上一致连续，故存在 $\delta_k>0$，当 $t_1, t_2\in[a, b]$，$|t_1-t_2|<\delta_k$ 时有

$$|x_k(t_1)-x_k(t_2)|<\frac{1}{3}\varepsilon \tag{2.3-3}$$

取 $\delta=\min(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_N)$，则当 $t_1, t_2\in[a, b]$，$|t_1-t_2|<\delta$时，对每个 $i=1, 2, \cdots, N$，都有

$$|x_i(t_1)-x_i(t_2)|<\frac{1}{3}\varepsilon \tag{2.3-4}$$

从而对任何 $x\in A$，t_1，$t_2\in[a,b]$，$|t_1-t_2|<\delta$时，由(2.3-2)、(2.3-3)、(2.3-4)式有

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant|x(t_1)-x_k(t_1)|+|x_k(t_1)-x_k(t_2)|$$
$$+|x_k(t_2)-x(t_2)|<\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon=\varepsilon$$

即 A是等度连续的.

$\Leftarrow$ 由于 $C[a,b]$是完备的距离空间，故只要证 A是全有界的，即证 A存在有限 ε网.

由于 A是等度连续的，故$\forall\ \varepsilon>0$，取充分大的 N，使当 t_1，$t_2\in[a,b]$，$|t_1-t_2|<\frac{1}{N}$时，对一切 $x\in A$，有

$$|x(t_1)-x(t_2)|<\frac{1}{3}\varepsilon \tag{2.3-5}$$

成立，将$[a,b]$区间 N等分，记分点为 $a=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_N=b$. 于是对每个 $x\in A$，有欧氏空间 $\mathbf{R}^{N+1}$中的点$(x(\tau_0),x(\tau_1),\cdots,x(\tau_N))$与之对应，把这种点的全体记为

$$\widetilde{A}=\{(x(\tau_0),x(\tau_1),\cdots,x(\tau_N))\mid x\in A\}\subset\mathbf{R}^{N+1}$$

由于 A是 $C[a,b]$上的有界集(即 A一致有界)，易知 $\widetilde{A}$是 $\mathbf{R}^{N+1}$中的有界集，由定理 2.3.2 知 $\widetilde{A}$是 $\mathbf{R}^{N+1}$中的列紧集，从而 $\widetilde{A}$具有有限 $\varepsilon/3$ 网.

$$(x_1(\tau_0),x_1(\tau_1),\cdots,x_1(\tau_N)),\cdots,(x_{n_0}(\tau_0),x_{n_0}(\tau_1),\cdots,x_{n_0}(\tau_N)) \tag{2.3-6}$$

下证：$x_1(t)$，$x_2(t)$，$\cdots$，$x_{n_0}(t)$也是 A的 ε网. $\forall\ x\in A$，对应有$(x(\tau_0),x(\tau_1),\cdots,x(\tau_N))\in\widetilde{A}$，故可取(2.3-6)式中某一点：$(x_k(\tau_0),x_k(\tau_1),\cdots,x_k(\tau_N))$，$1\leqslant k\leqslant n_0$，

$$|x(\tau_i)-x_k(\tau_i)|<\frac{1}{3}\varepsilon\qquad i=1,2,\cdots,N \tag{2.3-7}$$

从而对任何 $t\in[a,b]$，总有 $t\in[\tau_{i_0-1},\tau_{i_0}]$，于是由(2.3-5)、(2.3-6)、(2.3-7)式，有

$$|x(t)-x_k(t)|\leqslant|x(t)-x(\tau_{i_0})|+|x(\tau_{i_0})-x_k(\tau_{i_0})|$$
$$+|x_k(\tau_{i_0})-x_k(t)|<\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon=\varepsilon$$

即 A有有限 ε网 x_1，x_2，$\cdots$，x_{n_0}，从而 A列紧. □

推论 2.3.3(阿尔采拉(Arzela)引理) 设 $F=\{f_i\mid f_i\in C[a,b],\ i\in I\}$是 $C[a,b]$的一致有界且等度连续的函数族，则从 F中必可选出在$[a,b]$上一致收敛的子序列$\{f_n(t)\}$. □

定理 2.3.7 设 $A\subset l^p(p\geqslant1)$，$A$列紧$\Longleftrightarrow$以下两条成立.

(1) **A一致有界.** $\exists\ M>0$，$\forall\ x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots)\in A$，有$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}<M$

(2) **A等度收敛.** $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，$\forall\ x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots)\in A$，有$\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}<\varepsilon$ 证略. □

习　题　二

1. $d(x,y)=(x-y)^2$ 是所有实数组成的集合上的距离吗？

2. 验证 $d(x, y)=|x-y|^{1/2}$ 是定义在全体实数所组成的集合上的距离.

3. 设 X 是距离空间，试证 $d(x, y)$ 是关于 x, y 的连续函数.

4. 设 $d(x, y)$ 是 X 上的一个距离，则

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

也是 X 上的一个距离.

5. 点 x 到 X 的非空子集 A 的距离 $d(x, A)$ 定义为

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

试证：$\forall x, y \in X$，有

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$$

6. 设 (X_1, d_1)，(X_2, d_2) 是两个距离空间，它们的笛卡尔乘积 $X = X_1 \times X_2$，$\forall x = (x_1, x_2)$，$y = (y_1, y_2) \in X$. 试证：

(1) $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$

(2) $\bar{d}(x, y) = \sqrt{[d_1(x_1, y_1)]^2 + [d_2(x_2, y_2)]^2}$

(3) $\tilde{d}(x, y) = \max[d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)]$

都是 X 上的距离.

7. 证明 X 中的基本列是有界点列.

8. 证明：$A \subset X$ 是非空开集 $\Longleftrightarrow A$ 可表示为开球的并.

9. 证明：在离散的距离空间 X 中，X 的任一子集 A 既开又闭.

10. 设 $A \subset X$，$A \neq \varnothing$，$\varepsilon > 0$，证明：

(1) $\{x \in X | d(x, A) < \varepsilon\}$ 是 X 中的开集；

(2) $\{x \in X | d(x, A) \leqslant \varepsilon\}$ 是 X 中的闭集.

11. 证明：若距离空间中的基本列有收敛子列，则原来的基本列必收敛.

12. 若在 $\mathbf{R}^1 = (-\infty, +\infty)$ 上赋予距离

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y| \qquad x, y \in \mathbf{R}^1$$

试问：$\mathbf{R}^1$ 是完备空间吗？

13. 设 X 是距离空间，则 X 是完备的 $\Longleftrightarrow$ 对 X 中的任何一套闭球

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$$

其中 $B_n = \{x \in X | d(x, x_n) \leqslant \varepsilon_n\}$，当 $\varepsilon_n \to 0$ 时，必有唯一的 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

14. 设 X、Y 是距离空间，$A, B \subset X$，$f: A \to Y$ 连续，B 在 A 中稠密，试证 $\overline{f(B)}$ 在 $\overline{f(A)}$ 中稠密.

15. 举例说明：在连续映射下，开集的象不一定是开集.

16. X 是完备的距离空间，X_1 是 X 稠密子集，若 $X \neq X_1$，证明：把 X_1 视作独立的距离空间时(按 X 中的距离)，X_1 是不完备的距离空间，并由此证明 Riemann 可积函数类 $R[a, b]$ 按距离

$$d_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| \, \mathrm{d}t$$

是不完备的距离空间.

17. 设 $C_{2\pi}$ 是在$[0, 2\pi]$上连续且满足 $f(0)=f(2\pi)$ 的函数的全体，证明：$C_{2\pi}$ 在 $L^p[0, 2\pi](1\leqslant p<\infty)$中稠密.

18. 设(X, d)为离散的距离空间，$A\subset X$. 证明：A 为紧集的充分必要条件是 A 为有限点集.

19. 设 X 是紧的距离空间，$\{A_n\}$为 X 中的一列非空闭集，且

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset A_{n+1}\supset\cdots$$

证明：

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\neq\varnothing$$

20. 设 X, Y 均为距离空间，f: $X\rightarrow Y$ 是单射. 证明：f 是连续映射的充分必要条件是 f 把 X 中的任一紧集映成 Y 中的紧集.

21. 如果 X 是紧距离空间，M 是 X 的闭子集，证明 M 是紧的.

22. 证明：如果 F_1，F_2 都是距离空间 X 中的紧集，则必存在 $x_0\in F_1$，$y_0\in F_2$，使

$$d(F_1, F_2)=d(x_0, y_0)$$

其中 $d(F_1, F_2)=\inf_{x\in F_1, y\in F_2} d(x, y)$，称为 F_1 与 F_2 的距离.

第三章　线性赋范空间与内积空间

在第二章中，我们介绍了距离空间及其性质，在那里通过距离的概念引入了**点列的极限**. 点列极限是微积分中数列极限在抽象空间中的推广. 然而，只有距离结构、没有代数结构的空间，在应用时受到许多限制. 实际上，应用最多的空间如 $\mathbf{R}^n$，$C[a, b]$，l^p，$L^p[a, b]$等等. 这些空间中的元素间不仅可以定义距离，还可以定义某些代数运算. 本章要介绍的线性赋范空间及内积空间就是距离结构与代数结构相结合的产物，它较距离空间有明显的优越性.

3.1　线性赋范空间

3.1.1　定义及例子

定义 3.1.1(线性赋范空间)　设 X是实数域(或复数域)Λ上的线性空间. 在 X上定义映射 $X\to\mathbf{R}^1$：$x\to\|\cdot\|$. 若$\forall x, y\in X$，$\alpha\in\Lambda$满足：

(1) **正定性**：$\|x\|\geqslant 0$，$\|x\|=0\Longleftrightarrow x=0$，

(2) **正齐性**：$\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$，

(3) **三角不等式**：$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，

则称$\|x\|$为 x的**范数**，称$(X, \|\cdot\|)$为**线性赋范空间**，简记为 X. 通常称定义中的条件(1)、(2)、(3)为**范数公理**.

在线性赋范空间 X中可以定义距离，$\forall x, y\in X$，定义

$$d(x, y)=\|x-y\| \tag{3.1-1}$$

不难证明，由(3.1-1)式定义的 $d(x, y)$满足距离公理，并称它为由范数导出的距离. 这里 X按导出的距离成为距离空间.

由于线性赋范空间是距离空间，故线性赋范空间中的点的邻域、开集、闭集、点列收敛、极限点、列紧、可分等概念都有确切的定义，不完备的线性赋范空间也可以进行完备化.

定义 3.1.2(巴拿赫(Banach)空间)　设 X是一线性赋范空间，如果 X按照距离 $d(x, y)=\|x-y\|$是完备的，称 X为巴拿赫空间.

在第二章 2.2 节中所列举的空间中，在熟知的加法、数乘之下是线性空间，再适当地引入范数就构成线性赋范空间.

例 3.1.1　n维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$，对任何 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\mathbf{R}^n$，定义范数

$$\| \boldsymbol{x} \| = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{3.1-2}$$

容易验证 $\| \boldsymbol{x} \|$ 满足范数定义的条件(1)、(2)，条件(3)可由 Minkowski 不等式证得. 由范数导出的距离为

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \| = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.1-3}$$

前面已证 $\mathbf{R}^n$ 在此距离之下是完备的，所以 $\mathbf{R}^n$ 是 Banach 空间.

例 3.1.2 空间 $l^p(p \geqslant 1)$ 是 Banach 空间，$\forall x=(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots)$，定义

加法： $x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_k+y_k, \cdots)$

数乘： $\alpha \in \Lambda$，$\alpha x=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_k, \cdots)$

容易验证 l^p 在加法、数乘之下构成线性空间. 在 l^p 中定义范数

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^p \right)^{1/p} \tag{3.1-4}$$

不难验证(3.1-4)式满足范数的公理(1)、(2)、(3)，由范数导出的距离是

$$d(x, y) = \| x - y \| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} | x_i - y_i |^p \right)^{1/p} \tag{3.1-5}$$

l^p 在这个距离下是完备的，故 l^p 是 Banach 空间.

例 3.1.3 $C[a, b]$在通常加法、数乘意义下构成线性空间，在 $C[a, b]$上定义范数

$$\| x \| = \max_{t \in [a, b]} | x(t) | \tag{3.1-6}$$

可以验证(3.1-6)式满足范数公理(1)、(2)、(3). 由范数导出的距离为

$$d(x, y) = \| x - y \| = \max_{t \in [a, b]} | x(t) - y(t) | \tag{3.1-7}$$

$C[a, b]$在距离(3.1-7)式之下是完备的，故 $C[a, b]$是 Banach 空间.

注 3.1.1 可以证明在 $C[a, b]$上也可以定义范数

$$\| x \|_1 = \int_a^b | x(t) | \mathrm{d}t \tag{3.1-8}$$

而由范数 $\| x \|_1$ 导出的距离为

$$d_1(x, y) = \int_a^b | x(t) - y(t) | \mathrm{d}t \tag{3.1-9}$$

由第二章例 2.2.8 知 $C[a, b]$在距离 d_1 之下是不完备的，故 $C[a, b]$在范数 $\| x \|_1$ 之下不是 Banach 空间. 还可以证明 $C[a, b]$按范数

$$\| x \|_2 = \left(\int_a^b | x(t) |^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.1-10}$$

构成非完备的线性赋范空间.

例 3.1.4 设 $L^p[a, b](p \geqslant 1)$为$[a, b]$上 p方 L 可积函数的全体，其中几乎处处相等的函数视为同一函数，几乎处处为零的函数看作零元. 对通常的加法、数乘 $L^p[a, b]$构成线性空间. 在 $L^p[a, b]$中定义范数

$$\| x \| = \left(\int_a^b | x(t) |^p \mathrm{d}t \right)^{1/p} \tag{3.1-11}$$

容易验证 $\| x \|$是范数，且

$$d(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \tag{3.1-12}$$

为导出的距离，由定理 2.2.5 知 $L^p[a, b]$是 Banach 空间.

线性赋范空间 X 的子空间 X_1 是指 X_1 作为线性空间的子空间，并且 X_1 上的范数是 X 的范数在 X_1 上的限制，若 X_1 在 X 中是闭的，则称 X_1 为 X 的闭子空间.

3.1.2 线性赋范空间中的极限

关于线性赋范空间中点列的收敛性及有关概念，只要在由范数导出的距离 $d(x, y) = \|x - y\|$ 之下来讨论，就可得到相关定义和结果.

定义 3.1.3(依范数收敛) 设 X 是线性赋范空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的点列，$x \in X$，如果

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \tag{3.1-13}$$

就称$\{x_n\}$依范数收敛于 x(简称$\{x_n\}$收敛于 x)，记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，或 $x_n \to x\ (n\to\infty)$.

显然，依范数收敛就是按由范数导出的距离收敛.

在线性赋范空间中，关于点列的极限，有以下性质.

定理 3.1.1 设 X 是线性赋范空间，$\{x_n\}$，$\{y_n\} \subset X$.

(1) **有界性**：若 $x_n \to x(n\to\infty)$，则$\{\|x_n\|\}$有界.

(2) **关于线性运算的连续性**：若 $x_n \to x$，$y_n \to y(n\to\infty)$，则 $x_n + y_n \to x + y$，$\alpha x_n \to \alpha x$ $(n\to\infty)$，其中 α 为常数.

(3) **范数的连续性**：范数 $\|x\|$ 是 x 的连续函数.

证 仅证(1)及(3).

(1) 由于

$$\|x_n\| = \|x_n - x + x\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\|$$

取 $\varepsilon=1$，由 $\|x_n - x\| \to 0(n\to\infty)$，故 $\exists\ N$ 当 $n > N$ 时有 $\|x_n - x\| < 1$，所以，当 $n > N$ 时，有 $\|x_n\| \leqslant \|x\| + 1$. 取 $M = \max(\|x_1\|, \|x_2\|, \cdots, \|x_N\|, \|x\| + 1)$，则对每一个 n，有 $d(x_n, 0) = \|x_n\| \leqslant M$，即$\{\|x_n\|\}$有界.

(3) 由三角不等式立即得到

$$\|x_n\| - \|x\| \leqslant \|x_n - x\|$$

$$\|x\| - \|x_n\| \leqslant \|x - x_n\|$$

从而有

$$|\,\|x_n\| - \|x\|\,| \leqslant \|x_n - x\| \to 0 \qquad n\to\infty$$

于是

$$|\,\|x_n\| - \|x\|\,| \to 0 \qquad n\to\infty$$

即

$$\|x_n\| \to \|x\| \qquad n\to\infty$$

□

定理 3.1.2 设 X 是线性赋范空间，d 是由范数导出的距离，则 $\forall\ x, y, z \in X$，$\alpha \in \Lambda$，则有

(1) **平移不变性**：

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \tag{3.1-14}$$

(2) **绝对齐次性**：

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x, y) \tag{3.1-15}$$

证 (1) $d(x+z, y+z)=\|(x+z)-(y+z)\|$

$$=\|x-y\|=d(x, y)$$

(2) $d(\alpha x, \alpha y)=\|\alpha x-\alpha y\|=|\alpha|\,\|x-y\|=|\alpha|\,d(x, y)$ □

例 3.1.5 数列空间 S(第二章例 2.1.7)是距离空间，其距离为

$$d(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$$

这里 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_i, \cdots)$. 而 $d(x, y)$不满足(3.1-15)式，因此 d 不是由范数导出的距离，从而 S 不是线性赋范空间.

在线性赋范空间中，既有代数运算，又有极限运算，因此可以引进无穷级数的概念.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$是线性赋范空间 X 中的点列，表达式

$$x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}x_n \tag{3.1-16}$$

称为 X 中的**级数**.

$$s_n=x_1+x_2+\cdots+x_n=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

称为级数(3.1-16)的**部分和**. 如果 $\exists s\in X$，使得 $\|s_n-s\|\to 0(n\to\infty)$，则称级数收敛于 s，s 称为级数的**和**，记为 $s=\sum_{i=1}^{\infty}x_i$.

如果数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 绝对收敛. 然而，当且仅当 X 是 Banach 空间时，绝对收敛才蕴含着收敛.(参看本章习题 9、10)

定义 3.1.4(绍德尔(Schauder)基) 设 X 是线性赋范空间，$\{e_n\}$是 X 中的一个点列. 如果对于每一 $x\in X$，存在唯一的数列$\{\alpha_n\}$，使

$$\|x-(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n)\|\to 0 \qquad n\to\infty$$

就称$\{e_n\}$是空间 X 的一组 Schauder 基. $x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_ne_n$ 称为 x 关于$\{e_n\}$的展开.

例如，l^p 有一个 Schauder 基$\{e_n\}$，其中 $e_n=(0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$，$e_n$ 的第 n 个坐标等于 1，其余坐标为 0.

可以证明，若线性赋范空间 X 有一个 Schauder 基，则 X 是可分的线性赋范空间. 反之不真. 确实有人构造出没有 Schauder 基的可分空间的例子.

3.1.3 线性赋范空间的完备化

定义 3.1.5(线性等距同构) 设$(X_1, \|\cdot\|_1)$，$(X_2, \|\cdot\|_2)$是同一数域 Λ 上两个线性赋范空间，如果存在一一映射 T: $X_1\to X_2$，满足：

(1) **线性**：$\forall x, y\in X_1$，$\alpha, \beta\in\Lambda$，$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$，

(2) **等距**：$\|Tx\|_2=\|x\|_1$，

称 X_1，X_2 是**线性等距同构**，并称映射 T 是**线性等距同构映射**. 把线性等距同构的空间看作“**同一**”的.

定理 3.1.3(完备化定理) 设 X 是一线性赋范空间，那么，必存在 Banach 空间 Y，使 X 与 Y 的一个稠密子空间 Y_1 线性等距同构，且在线性等距同构的意义下，Y 是唯一的.

证略. □

例如，$C[a,b]$在 $\|x\|_2=\left(\int_a^b|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$ 之下是不完备的，而$(C[a,b],\|\cdot\|_2)$的完备化空间是 $L^2[a,b]$.

3.2 有限维线性赋范空间

本节我们来研究有限维线性赋范空间. 它较一般的赋范空间具有较多的优越性，在有限维空间中处理问题会很方便.

3.2.1 n维线性赋范空间的模型

X是实数域$\mathbf{R}^1$上的 n维线性空间是指，在 X中存在 n个线性无关的元素(或向量)：$e_1, e_2, \cdots, e_n$，使对任何 $x\in X$，有唯一表达式

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$$

这里 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$称为 x关于 $e_1,e_2,\cdots,e_n$的坐标，记这些坐标构成的向量为$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$.

在线性代数中熟知，当 X取定一组基时，对 X中的每一点 x，按其坐标与 n维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$中的点$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$建立一一对应 T，即

$$\forall\ x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in X$$

$$Tx=T\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\xlongequal{\text{def}}\tilde{x} \tag{3.2-1}$$

可以证明 T保持了 X与 $\mathbf{R}^n$的线性结构不变(证略). 下面证 T关于 X与 $\mathbf{R}^n$的某种范数是保距的.

设$\|\cdot\|_X$是 X上的某种范数，$\forall\ x\in X$，$Tx=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\tilde{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{R}^n$. 在$\mathbf{R}^n$中定义实值函数为

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_{\mathbf{R}^n}=\|Tx\|_{\mathbf{R}^n}=\|x\|_X \tag{3.2-2}$$

(1) 显见$\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_{\mathbf{R}^n}\geqslant 0$，且

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_{\mathbf{R}^n}=0\Longleftrightarrow\|x\|_X=0\Longleftrightarrow x=0\Longleftrightarrow(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\xlongequal{\text{def}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\mathbf{0}$$

(2) $\alpha\in\Lambda$，$\tilde{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{R}^n$，

$$\begin{aligned}\|\alpha\tilde{\boldsymbol{x}}\|_{\mathbf{R}^n}&=\|\alpha Tx\|_{\mathbf{R}^n}=\|T(\alpha x)\|_{\mathbf{R}^n}\\&=\|\alpha x\|_X=|\alpha|\ \|x\|_X=|\alpha|\ \|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_{\mathbf{R}^n}\end{aligned}$$

(3) $\forall\ \tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{y}}\in\mathbf{R}^n$，$\|\tilde{\boldsymbol{x}}+\tilde{\boldsymbol{y}}\|_{\mathbf{R}^n}=\|Tx+Ty\|_{\mathbf{R}^n}$

$$\begin{aligned}&=\|T(x+y)\|_{\mathbf{R}^n}=\|x+y\|_X\leqslant\|x\|_X+\|y\|_X\\&=\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_{\mathbf{R}^n}+\|\tilde{\boldsymbol{y}}\|_{\mathbf{R}^n}\end{aligned}$$

故$\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_{\mathbf{R}^n}$是$\mathbf{R}^n$中的范数.

反之，设$\|\cdot\|_{\mathbf{R}^n}$是$\mathbf{R}^n$中的某一个范数，$\forall\ \tilde{\boldsymbol{x}}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$，$T^{-1}\tilde{x}=$

$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$，则 $\|x\|_X=\|\tilde{x}\|_{\mathbf{R}^n}$ 是 X 中的范数．因此 T 是线性保距同构的，从而可得．

定理 3.2.1 设 X 是（实数域 $\mathbf{R}^1$ 上）有限维（n维）线性赋范空间，则 X 与 $\mathbf{R}^n$（在某种范数下）线性等距同构． □

注 3.2.1 定理 3.2.1 是说，对于任何有限维（n维）空间 X，都可以把 $\mathbf{R}^n$ 看作 X 的"模型"，还可以得到，任何有限维线空赋范空间都是完备的．

3.2.2 范数的等价性

在同一线性空间中，可以定义不同的范数．例如，在 $\mathbf{R}^n$ 中，可定义：

$$\forall\ \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$$

在同一线性空间引入两个不同的范数 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$，这两种范数定义的收敛是否相同，是值得研究的问题．为此给出两范数等价的概念．

定义 3.2.1(等价范数) 设 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 是同一线性空间 X 中的两个不同的范数．如果由 $\|x_n\|_1\to 0\Rightarrow\|x_n\|_2\to 0$，则称范数 $\|\cdot\|_1$ 比 $\|\cdot\|_2$ 更强；如果 $\|\cdot\|_1$ 比 $\|\cdot\|_2$ 更强，且 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 更强，称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价．

定理 3.2.2(范数等价的充要条件) 线性空间 X 中两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价 $\Longleftrightarrow$ 存在 a，b 均为正数，使 $\forall\ x\in X$，有

$$a\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant b\|x\|_2 \tag{3.2-3}$$

证 $\Leftarrow$ 易证（略）．下证 $\Rightarrow$．用反证法，设对任何正数 a，b，(3.2-3)式不能对 $x\in X$ 的一切 x 成立．为确定起见，可设(3.2-3)式右边不等式不能对一切 $x\in X$ 成立，即 $\forall\ n$，$\exists\ x_n\in X$，使 $\|x_n\|_1>n\|x_n\|_2$，也就是

$$\frac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1}<\frac{1}{n}$$

令 $\tilde{x}_n=\dfrac{x_n}{\|x_n\|_1}$，则 $\|\tilde{x}_n\|_2=\dfrac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1}<\dfrac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$，但 $\|\tilde{x}_n\|_1=\dfrac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_1}=1\nrightarrow 0$ $(n\to\infty)$，这与 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价相矛盾，所以(3.2-3)式成立． □

3.2.3 有限维线性赋范空间的性质

定理 3.2.3(范数等价) 设 X 是有限维线性赋范空间，则 X 上的任何范数都等价．

证 分两步来证：第一步证 X 上的任何范数都与 X 上某一范数 $\|\cdot\|_0$ 等价，第二步证明 X 上的任何两个范数等价．

(1) 设 e_1，e_2，…，e_n 是 X 的一组基，则 $\forall\ x\in X$，x 可唯一地表示为 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$．取定 X 上的一个范数 $\|x\|_0=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|$．对 X 上的任何范数 $\|\cdot\|$，证 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_0$ 等

价.

一方面，$\forall x\in X$，有

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|\xi_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\,\|e_i\|$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\|e_i\|\sum_{i=1}^{n}|\xi_i| = b\sum_{i=1}^{n}|\xi_i| = b\|x\|_0 \tag{3.2-4}$$

这里 $b=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\|e_i\|$.

另一方面，记

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\| = f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$$

由(3.2-4)式知，$f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$是$\mathbf{R}^n$(在范数$\|\cdot\|_0$下)的非负连续函数，故 f在$\mathbf{R}^n$的有界闭集 $S=\{\mathbf{x}^1 \mid \|\mathbf{x}^1\|_0=1, \mathbf{x}^1\in\mathbf{R}^n\}$上有最小值 a，由于零元$\mathbf{0}\notin S$，故 $a>0$，$\forall x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in X$，$x\neq 0$，令

$$\tilde{x} = \frac{x}{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|} = \frac{x}{\|x\|_0}$$

则 $\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\in S$，所以$\|\tilde{x}\|\geqslant a$，从而 $\dfrac{\|x\|}{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|}\geqslant a$，即

$$a\|x\|_0 \leqslant \|x\| \tag{3.2-5}$$

结合(3.2-4)、(3.2-5)式有

$$a\|x\|_0 \leqslant \|x\| \leqslant b\|x\|_0$$

从而$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_0$等价.

(2) 设$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$是 X上的任意两个范数，由(1)知，存在 a_1，b_1，a_2，b_2(均为正数)，有

$$a_1\|x\|_0 \leqslant \|x\|_1 \leqslant b_1\|x\|_0$$
$$a_2\|x\|_0 \leqslant \|x\|_2 \leqslant b_2\|x\|_0$$

从而有

$$\frac{a_2}{b_1}\|x\|_1 \leqslant a_2\|x\|_0 \leqslant \|x\|_2 \leqslant b_2\|x\|_0 \leqslant \frac{b_2}{a_1}\|x\|_1$$

即

$$\frac{a_2}{b_1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \frac{b_2}{a_1}\|x\|_1$$

所以$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价. □

注 3.2.2 有了定理 3.2.3 的结论，在有限维空间讨论极限问题时可以任意选取不同的范数，它们的收敛效果是一样的.

定理 3.2.4(列紧的充要条件) 设 X是线性赋范空间，则 X的维数有限$\Longleftrightarrow X$中的每个有界集必是列紧集.

证 $\Rightarrow$ 设 X是有限维的，则可以用$\mathbf{R}^n$作 X的"模型"，因$\mathbf{R}^n$中的有界集是列紧的，故 X中的有界集也列紧.

$\Leftarrow$ 设 S是 X的单位球面，$S=\{x \mid \|x\|=1, x\in X\}$，由于 S是 X中的列紧集，故对 $\varepsilon=1/2$，S存在有限 ε网 $A_\varepsilon=\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}\subset X$，令

$$F=\operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}=\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i \mid \alpha_i\in \Lambda, x_i\in A_\varepsilon\}$$

显见 F是 X的 N维子空间(维数可能小于 N). 下证 $F=X$. 用反证法. 设 $F\neq X$，则 $\exists x_0\in X-F$，注意 F为 X的闭集(有限维子空间完备)，故有

$$d(x_0, F)=\inf_{y\in F}\|x_0-y\|=a>0$$

由确界定义知 $\exists y_0\in F$，满足

$$a\leqslant\|x_0-y_0\|<a+\frac{1}{2}a=\frac{3}{2}a$$

再由$\dfrac{y_0-x_0}{\|y_0-x_0\|}\in S$，故 $\exists x_{i_0}\in A_\varepsilon$，有$\dfrac{y_0-x_0}{\|y_0-x_0\|}\in O(x_{i_0}, \varepsilon)$. 即

$$\left\|\frac{y_0-x_0}{\|y_0-x_0\|}-x_{i_0}\right\|<\frac{1}{2}$$

记 $z=y_0-\|y_0-x_0\|x_{i_0}$，则 $z\in F$(因 $y_0\in F$且 $x_{i_0}\in F$)，于是有

$$\begin{aligned}a&\leqslant\|z-x_0\|=\|y_0-\|y_0-x_0\|x_{i_0}-x_0\|\\&=\|y_0-x_0\|\left\|\frac{y_0-x_0}{\|y_0-x_0\|}-x_{i_0}\right\|\leqslant\frac{3}{2}a\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}a\end{aligned}$$

这是一个矛盾. 故 $F=X$，即 X是有限维的. □

值得注意的是：有界集是列紧的结论为有限维空间所独有. 作为定理 3.2.4 的等价命题有：**若 X是无穷维(不是有限维)的线性赋范空间，则至少有一个有界集 A不是列紧集.** 还可以进一步证明如下定理.

定理 3.2.5 若 X是无穷维的线性赋范空间，则 X中的闭单位球不是紧集.

为了证明定理 3.2.5，需要证明如下的引理.

引理 3.2.1(F, Riesz) 设 A是线性赋范空间 X的闭子空间，$A\neq X$，则存在 $x\in X$，使 $\|x\|=1$，$d(x, A)\geqslant\dfrac{1}{2}$.

证 取 $y\in X-A$，则 $\rho\overset{\text{def}}{=\!=}d(y, A)>0$(因 $y\notin A$且 A闭). 取 $a\in A$，使 $\|y-a\|<2\rho$. 令 $x=(y-a)/\|y-a\|$，则 $\|x\|=1$. 故

$$d(x, A)=d\left(\frac{y-a}{\|y-a\|}, A\right)=\frac{1}{\|y-a\|}d(y-a, A) \qquad \text{(绝对齐次性)}$$

$$=\frac{1}{\|y-a\|}d(y, A)>\frac{\rho}{2\rho}=\frac{1}{2} \qquad \text{(平移不变性)}$$

□

下面证明定理 3.2.5.

因 X是无穷维，则 X必有线性无关的无限序列$\{x_n\}$，令

$$X_n=\operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

则 X_n是 X的 n维闭线性子空间，且有 $X_n\subset X_{n+1}$，$X_n\neq X_{n+1}$，$n=1, 2, \cdots$，由引理 3.2.1

知存在 $y_n \in X_{n+1}$，$\|y_n\|=1$，$d(y_n, X_n)\geqslant \frac{1}{2}$，$n=1, 2, \cdots$，显然有

$$\|y_n - y_m\| \geqslant \frac{1}{2} \qquad m\neq n;\ m, n=1, 2, 3, \cdots$$

故点列$\{y_n\}$没有收敛子列，因此 X 的单位闭球 $\bar{B}(0, 1)$ 不是紧集. □

注 3.2.3 由定理 3.2.5 的证明可以看出：无限维空间中的单位球是非紧集. 因闭球可以通过平移与相似变换相互转化，而这些变换并不改变紧性，所以无穷维空间的任何闭球都是非紧集. 又可推出，无穷维空间中的含内点的集合是非紧集. 由此可见，在无穷维线性赋范空间中紧集甚为稀少，这也正是在无穷维空间中处理数学问题困难之所在.

3.3 内积空间与希尔伯特空间

在前两节中我们研究了线性赋范空间. 所谓线性赋范空间，就是在线性空间中，给向量赋予范数，即规定了向量的长度，而没有给出两向量之间的夹角. 我们知道，在欧氏空间中，向量不仅有长度(模)，两向量间还有夹角，特别是有了直交概念之后，由它可以得到勾股定理、直交投影等. 两向量的夹角与内积密切相关. 本节要把内积概念推广到一般的线性空间，而得到内积空间，它是线性代数中欧氏空间的自然推广.

3.3.1 内积与内积空间

定义 3.3.1(内积与内积空间) 设 U 是数域 Λ 上的线性空间，定义映射$(\cdot, \cdot)$：$U\times U\to\Lambda$，对任何 $x, y, z\in U$，$\alpha\in\Lambda$，满足：

(1) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$

(2) $(\alpha x, z)=\alpha(x, z)$

(3) $(x, y)=\overline{(y, x)}$

(4) $(x, x)\geqslant 0$，$(x, x)=0 \Longleftrightarrow x=0$

则称(x, y)为 x, y 的内积，定义了内积的线性空间 U 称为内积空间.

通常称条件(1)、(2)、(3)、(4)为内积的四条公理.

当数域 Λ 是实数域时，内积空间 U 称为实内积空间；当 Λ 是复数域时，U 称为复内积空间.

由内积公理不难推得：$\forall\, x, y, z\in U$，$\alpha, \beta\in\Lambda$，有

(1) $(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x, z)+\beta(y, z)$

(2) $(x, \alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}(x, y)+\bar{\beta}(x, z)$；(当 $\lambda\in\mathbf{R}^1$ 时，$\bar{\alpha}=\alpha$，$\bar{\beta}=\beta$)

(3) $(x, \alpha y)=\bar{\alpha}(x, y)$.

这说明内积对于第一变元是线性的，对第二变元是共轭线性的.

若无特别声明，U 表示复内积空间.

在 U 中，若令

$$\|x\|=(x, x)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3-1}$$

则 U 为线性赋范空间. 要证(3.3-1)式确为范数，需要以下引理.

引理 3.3.1((许瓦尔兹(Schwarz)不等式) 设 U 是内积空间，则 $\forall\ x,\ y\in U$，有

$$|(x,\ y)|\leqslant \|x\|\ \|y\| \tag{3.3-2}$$

证 $\forall\ \lambda\in \Lambda$，则

$$(x+\lambda y,\ x+\lambda y)\geqslant 0$$

或

$$(x,\ x)+\bar{\lambda}(x,\ y)+\lambda(y,\ x)+|\lambda|^2(y,\ y)\geqslant 0$$

当 $y=0$ 时，(3.3-2)式显然成立；当 $y\neq 0$ 时，取 $\lambda=-\dfrac{(x,\ y)}{(y,\ y)}$，有

$$(x,\ x)-\frac{2|(x,\ y)|^2}{(y,\ y)}+\frac{|(x,\ y)|^2}{(y,\ y)^2}(y,\ y)\geqslant 0$$

即

$$(x,\ x)-\frac{|(x,\ y)|^2}{(y,\ y)}\geqslant 0$$

故

$$|(x,\ y)|^2\leqslant (x,\ x)(y,\ y)$$

两边开方，得(3.3-2)式. □

下面证明由(3.3-1)式定义的 $\|\cdot\|$ 是范数. 容易验证满足范数公理的(1)、(2). 下证满足三角不等式. $\forall\ x,\ y\in U$. 由(3.3-2)式，有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=|(x+y,\ x+y)|\\&=|(x,\ x+y)+(y,\ x+y)|\\&\leqslant|(x,\ x+y)|+|(y,\ x+y)|\\&\leqslant\|x\|\ \|x+y\|+\|y\|\ \|x+y\|\\&=(\|x\|+\|y\|)\|x+y\|\end{aligned}$$

故

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$$ □

由此可知，任何内积空间都是线性赋范空间，并称由(3.3-1)式定义的范数是 U 中由内积导出的范数，这里由范数导出的距离为

$$d(x,\ y)=\|x-y\|=(x-y,\ x-y)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3-3}$$

根据 Schwarz 不等式容易推得：内积 $(x,\ y)$ 是 $x,\ y$ 的连续函数. 事实上，设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 是 U 中的点列，分别收敛(依范数收敛)于 $x_0,\ y_0\in U$，于是有

$$\begin{aligned}|(x_n,\ y_n)-(x_0,\ y_0)|&\leqslant|(x_n,\ y_n)-(x_0,\ y_n)|+|(x_0,\ y_n)-(x_0,\ y_0)|\\&\leqslant\|x_n-x_0\|\ \|y_n\|+\|x_0\|\ \|y_n-y_0\|\rightarrow 0\qquad n\rightarrow\infty\end{aligned}$$

这里用到了收敛点列必有界的结论.

定义 3.3.2(希尔伯特(Hilbert)空间) 设 U 是内积空间，若 U 按由内积导出的范数 $\|x\|=(x,\ x)^{\frac{1}{2}}$ 成为 Banach 空间，就称 U 是 Hilbert 空间，记为 H.

例 3.3.1 在 Λ^n(实的或复的)中定义内积，$\forall\ \boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)\in\Lambda^n$，

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i \tag{3.3-4}$$

容易验证$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$满足内积公理(1)～(4)，从而 Λ^n 是内积空间. 由内积导出的范数为

$$\|\boldsymbol{x}\| = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3-5}$$

由内积导出的距离为

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3-6}$$

Λ^n 在范数(3.3-5)式下是 Banach 空间，所以 Λ^n 是 Hilbert 空间.

例 3.3.2 在 $l^2 = \{x \mid x=(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots), \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty, x_k$ 为复数$\}$中定义内积. $\forall x=(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots), y=(y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots) \in l^2$，定义

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i \tag{3.3-7}$$

由 Cauchy 不等式有

$$|(x, y)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

可知(3.3-7)式有意义，并可验证(x, y)满足内积公理，故 l^2 是内积空间. 由内积导出的范数和距离分别为

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3-8}$$

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3-9}$$

由本章例 3.1.2 知 l^2 是 Hilbert 空间.

例 3.3.3 $L^2[a, b]$表示$[a, b]$上平方 L 可积复值函数的全体，$\forall x, y \in L^2[a, b]$，定义

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\bar{y}(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.3-10}$$

可以验证 $L^2[a, b]$是内积空间，由内积导出的范数和距离分别为

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3-11}$$

$$d(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3-12}$$

易见 $L^2[a, b]$是 Hilbert 空间.

已经指出：内积空间必是线性赋范空间，自然要问：线性赋范空间是否是内积空间呢？答案未必成立，我们有以下的定理.

定理 3.3.1(线性赋范空间成为内积空间的充要条件) 线性赋范空间 X 成为内积空间 $\Longleftrightarrow$ 范数 $\|\cdot\|$ 对一切 $x, y \in X$ 满足

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{3.3-13}$$

称(3.3-13)式为平行四边形公式(或称为中线公式).

证 $\Rightarrow$ 可通过直接计算而得到. 设 X 为内积空间，则

$$\begin{aligned}
&\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y,x+y)+(x-y,x-y)\\
&=(x,x+y)+(y,x+y)+(x,x-y)-(y,x-y)\\
&=\overline{(x+y,x)}+\overline{(x+y,y)}+\overline{(x-y,x)}-\overline{(x-y,y)}\\
&=(\overline{[(x+y)+(x-y)],x})+(\overline{[(x+y)-(x-y)],y})\\
&=(2x,x)+(2y,y)=2(x,x)+2(y,y)=2\|x\|^2+2\|y\|^2
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ 当 X 是实线性赋范空间时，定义

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2) \tag{3.3-14}$$

当 X 为复空间时，定义

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)+\frac{1}{4}\mathrm{i}(\|x+\mathrm{i}y\|^2-\|x-\mathrm{i}y\|^2) \tag{3.3-15}$$

当范数满足公式(3.3-13)时，可以验证(x,y)是内积(验证略). □

注 3.3.1 由定理 3.3.1，若线性赋范空间 X 的范数不满足平行四边形公式(3.3-13)，则 X 上不存在这样的内积，使得由内积导出的范数就是 X 上的给定范数.

例如，$C[a,b]$ 不是内积空间，其中范数为 $\|x\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$.

实际上，取 $x=1$，$y=\frac{t-a}{b-a}$，则 $\|x\|=\|y\|=1$，而

$$x+y=1+\frac{t-a}{b-a},\quad x-y=1-\frac{t-a}{b-a}$$

$$\|x+y\|=\max_{t\in[a,b]}\left|1+\frac{t-a}{b-a}\right|=2$$

$$\|x-y\|=\max_{t\in[a,b]}\left|1-\frac{t-a}{b-a}\right|=1$$

于是

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5,\ 2(\|x\|+\|y\|)=4$$

故范数不满足平行四边形公式，所以 $C[a,b]$ 不是内积空间.

3.3.2 正交与正交分解

定义 3.3.3(正交性) 设 U 是内积空间，$x,y\in U$，$M,N\subset U$.

(1) 若$(x,y)=0$，就称 x 与 y 正交，记为 $x\perp y$;

(2) 若 $\forall y\in M$，$(x,y)=0$，则称 x 与 M 正交，记为 $x\perp M$;

(3) 若 $\forall x\in M$，$\forall y\in N$，有$(x,y)=0$，称 M 与 N 正交，记为 $M\perp N$.

定理 3.3.2(勾股定理) 若 $x\perp y$，则

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2 \tag{3.3-16}$$

证 因为 $x\perp y$，所以$(x,y)=0$，

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2&=(x+y,x+y)\\
&=(x,x)+(x,y)+\overline{(x,y)}+(y,y)\\
&=\|x\|^2+\|y\|^2
\end{aligned}$$

□

注 3.3.2 在一般的内积空间 U 中，如果(3.3－16)式成立，未必有 $x\perp y$. 事实上，由 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2\mathrm{Re}(x,y)$ 可得 $\mathrm{Re}(x,y)=0$，即在(3.3－16)式成立时，仅能保证内积的实部为零，不能保证内积为零，故未必有 $x\perp y$. 特别当 U 为实的内积空间时，$x\perp y\Longleftrightarrow$(3.3－16)式成立.

定义 3.3.4(正交补) 称 U 中一切与 $M\subset U$ 直交的元素组成的集合叫做 M 的正交补，记为 $M^{\perp}$. 即有

$$M^{\perp}=\{x\mid x\perp M,\ x\in U\} \tag{3.3-17}$$

由正交补的定义，显见正交补有如下的性质.

(1) $U^{\perp}=\{0\}$，$\{0\}^{\perp}=U$；

(2) 设 M 是非空的线性子空间，$M\subset U$，$M\cap M^{\perp}=\{0\}$；

(3) $M^{\perp}$ 是 U 的闭线性子空间.

证 结论(1)、(2)显然成立，仅证(3). $\forall x,y\in M^{\perp}$，$\alpha,\beta\in\Lambda$，$z\in M$，有 $(x,z)=0$，$(y,z)=0$，$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)=0$，$\alpha x+\beta y\perp z$，即 $\alpha x+\beta y\in M^{\perp}$，故 $M^{\perp}$ 是 U 的子空间.

设 x_0 是 $M^{\perp}$ 的任一极限点，则存在 $x_n\in M^{\perp}$，使 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，从而有

$$(x_0,z)=\lim_{n\to\infty}(x_n,z)=0 \qquad \forall z\in M$$

故 $x_0\in M^{\perp}$，所以 $M^{\perp}$ 是 U 的闭子空间. □

定义 3.3.5(正交分解) 设 M 是内积空间 U 的线性子空间，$x\in U$，如果存在 $x_0\in M$，$z\in M^{\perp}$，使得

$$x=x_0+z \tag{3.3-18}$$

则称 x_0 为 x 在 M 上的**正交投影**，(3.3－18)式也称作 x 的**正交分解**.

定理 3.3.3(投影定理) 设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间，则 H 中的元素 x 在 M 中存在唯一的正交投影，即存在唯一的 $x_0\in M$，$z\in M^{\perp}$，满足(3.3－18)式.

证 $\forall x\in H$，令

$$d(x,M)=\inf_{y\in M}\|x-y\|=a\geqslant 0$$

则存在 $\{y_n\}\subset M$，使得 $\|y_n-x\|\to d\ (n\to\infty)$. 可证 $\{y_n\}$ 是 M 中的基本列. 实际上，对任何 m,n，有 $\frac{1}{2}(x_m+x_n)\in M$，

$$\left\|x-\frac{1}{2}(y_m+y_n)\right\|\geqslant a$$

由中线公式(3.3－13)式，有

$$\begin{aligned}
0\leqslant\|y_m-y_n\|^2&=\|(y_m-x)+(x-y_n)\|^2\\
&=\|(y_m-x)+(x-y_n)\|^2+\|(y_m-x)\\
&\quad-(x-y_n)\|^2-\|(y_m-x)-(x-y_n)\|^2\\
&=2\|y_m-x\|^2+2\|x-y_n\|^2-\|(y_m+y_n)-2x\|^2\\
&\leqslant 2\|y_m-x\|^2+2\|y_n-x\|^2-4a^2\to 0 \qquad m,n\to\infty
\end{aligned}$$

故$\{y_n\}$是M中的基本列. 由M闭可知M是H的完备子空间, 故存在$x_0\in M$, 使$y_n\to x_0(n\to\infty)$, 则$d=\|x-x_0\|=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$.

记$x-x_0=z$, 则$x=x_0+z$. 下证$z\perp M$.

$\forall y\in M$, $(y\neq 0)$, $\forall\lambda\in\Lambda$, 有$x_0+\lambda y\in M$, 则

$$\begin{aligned}d^2&\leqslant\|x-(x_0+\lambda y)\|^2=((x-x_0)-\lambda y,(x-x_0)-\lambda y)\\&=(x-x_0,x-x_0)-((x-x_0),\lambda y)-(\lambda y,(x-x_0))-|\lambda|^2(y,y)\\&=d^2-2\mathrm{Re}[\bar\lambda(x-x_0,y)]+|\lambda|^2\|y\|^2\end{aligned}$$

特取$\lambda=\dfrac{(x-x_0,y)}{\|y\|^2}$, 代入上式有

$$\begin{aligned}d^2&\leqslant d^2-2\mathrm{Re}\left[\overline{\frac{(x-x_0,y)}{\|y\|^2}}\cdot(x-x_0,y)\right]+\frac{|(x-x_0,y)|^2}{\|y\|^4}\|y\|^2\\&=d^2-\frac{|(x-x_0,y)|^2}{\|y\|^2}\end{aligned}$$

即$(x-x_0,y)=0$, 故$z=(x-x_0)\perp M$.

最后证明分解式的唯一性, 只需证明0的分解是唯一的. 设$0=x_1+z_1$, $x_1\in M$, $z_1\in M^{\perp}$, 则

$$0=(0,x_1)=(x_1,x_1)+(z_1,x_1)=\|x_1\|^2+0=\|x_1\|^2$$

故$x_1=0$, 从而$z_1=0$, 即0的分解式唯一. □

注3.3.3 由定理3.3.3的证明过程易知, 只要M是H的完备子空间, 而H本身不完备, 定理的结论也成立.

3.4 内积空间中的傅立叶级数

在$\mathbf{R}^3$中, 有三个相互正交的单位向量$\boldsymbol{e}_1=\{1,0,0\}$, $\boldsymbol{e}_2=\{0,1,0\}$, $\boldsymbol{e}_3=\{0,0,1\}$, 有了这三个向量, 则对任何向量$\boldsymbol{a}$有唯一的分解式

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3\tag{3.4-1}$$

其中, $a_1=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_1)$, $a_2=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_2)$, $a_3=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_3)$. 这里用到了向量的正交性. 在内积空间中, 我们有了正交的概念, 设法把内积空间中的元素表示成如同(3.4-1)式的表达式, 将会是十分有意义的事情.

3.4.1 标准正交系

定义3.4.1(标准正交系) 设U是内积空间, $\{e_n\}$是U中的点列, 若满足:

$$(e_i,e_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\1 & i=j\end{cases}\tag{3.4-2}$$

则称$\{e_n\}$是U中的一个标准正交系.

例如, $e_1=(1,0,\cdots,0,\cdots)$, $e_2=(0,1,\cdots,0,\cdots)$, $\cdots$, $e_k=(0,0,\cdots,1,0,\cdots)$, $\cdots$是l^2中的标准正交系.

再如：

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \cdots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \cdots\right\} \tag{3.4-3}$$

是 $L^2[-\pi,\pi]$中的标准正交系.

标准正交系有如下简单性质.

(1) 标准正交系$\{e_n\}$是线性独立系，即$\{e_n\}$中任何有限组是线性无关的. 事实上，设$\{e_{n_1},e_{n_2},\cdots,e_{n_k}\}$是$\{e_n\}$的任一有限组，如果

$$\alpha_1 e_{n_1}+\alpha_2 e_{n_2}+\cdots+\alpha_k e_{n_k}=0$$

则对每一 $j=1,2,\cdots,k$, 有

$$0=(\theta,e_{n_j})=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_{n_i},\ e_{n_j}\right)=\alpha_j(e_{n_j},\ e_{n_j})=\alpha_j$$

这表明$\{e_{n_1},e_{n_2},\cdots,e_{n_k}\}$线性无关，故$\{e_n\}$是线性独立系.

(2) 对内积空间中的任何线性独立系，都可以应用格拉姆—施密特(Gram-Schmidt)正交化过程得到标准正交系，即有下述定理.

定理 3.4.1(正交化定理) 设$\{x_n\}$是内积空间 U中的任一线性独立系，则可将$\{x_n\}$用 Gram-Schmidt 方法标准正交化为标准正交系$\{e_n\}$，且对任何自然数 n, 有

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{(n)}e_k,\quad e_n=\sum_{k=1}^{n}\beta_k^{(n)}x_k \tag{3.4-4}$$

且 $\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

证 因为$\{x_n\}$是线性独立系，所以 $x_1\neq0$, 令

$$e_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}$$

则

$$\|e_1\|=1$$

再将 x_2 在由 e_1 所张成的子空间 M_1 上作正交分解：

$$x_2=(x_2,e_1)e_1+v_2$$

其中 $v_2=x_2-(x_2,e_1)e_1$. 由于 x_1, x_2 线性无关，因而 $v_2\neq0$ 且 $v_2\in M_1^{\perp}$(事实上，$(v_2,e_1)=(x_2,e_1)-(x_2,e_1)(e_1,e_1)=0$)，即 $v_2\perp e_1$, 再令

$$e_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}$$

则

$$\|e_2\|=1$$

显见 e_2 是 x_1, x_2 的线性组合，且 $e_2\perp e_1$.

再将 x_3 在由 e_1, e_2 所张成的子空间 M_2 上作正交分解：

$$x_3=(x_3,e_1)e_1+(x_3,e_2)e_2+v_3$$

易知 $v_3=x_3-(x_3,e_1)e_1-(x_3,e_2)e_2\neq0$, 且 $v_3\in M_2^{\perp}$. 令

$$e_3=\frac{v_3}{\|v_3\|},\quad \|e_3\|=1$$

e_3 是 x_1, x_2, x_3 的线性组合且 $e_3\perp e_1$, $e_3\perp e_2$.

应用数学归纳法可以证明，对每一个 n,

$$v_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (x_n, e_i) e_i$$

不是零向量且 v_n 与 $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$ 都正交，取

$$e_n = \frac{v_n}{\| v_n \|}, \quad \| e_n \| = 1$$

显然

$$x_n = v_n + \sum_{i=1}^{n-1} (x_n, e_i) e_i = \sum_{i=1}^{n-1} (x_n, e_i) e_i + \| v_n \| e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(n)} e_i$$

反之容易看出，e_n 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性组合，从而(3.4-4)式成立. □

例 3.4.1(勒让德(Legendre)多项式) $[-1, 1]$上的连续实值函数的全体 $C[-1, 1]$，按内积

$$(x, y) = \int_{-1}^{1} x(t) y(t) \, \mathrm{d}t$$

构成一实内积空间 U，而 U 的完备化空间为实希尔伯特空间 $L^2[-1, 1]$. 令 $x_0 = 1, x_1 = t, \cdots, x_n = t^n, \cdots, t \in [-1, 1]$，则$\{x_n\}$是一列线性独立系. 利用 Gram-Schmidt 方法得到标准正交系$\{e_n\}$，具体计算可取：$e_0 = \frac{x_0}{\| x_0 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$；而 $v_1 = x_1 - (x_1, e_0) e_0 = t$，$e_1 = \frac{v_1}{\| v_1 \|} = \sqrt{\frac{3}{2}} t$；类似地，可得 $e_2 = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \cdots$. 一般地，可以求出

$$e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot P_n(t) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.4-5}$$

其中 $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} [(t^2 - 1)^n]$，$P_n(t)$称为 n阶的 Legendre 多项式. $\{P_n(t)\}$在 $L^2[-1, 1]$上是标准正交的. 写出 $P_n(t)$的前六项为：

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = t$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$$

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$

$$P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3)$$

$$P_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t)$$

3.4.2 傅立叶级数及其收敛性

定义 3.4.2(傅立叶(Fourier)级数) 设 U 是内积空间，$\{e_k\}$是 U 中的标准正交系，$x \in U$，称内积

$$c_k = (x, e_k) \qquad k = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.4-6}$$

为 x 关于$\{e_k\}$的傅立叶系数，并称

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \tag{3.4-7}$$

为 x 关于 $\{e_n\}$ 的傅立叶级数.

注 3.4.1 微积分中的傅立叶级数是 $L^2[-\pi, \pi]$ 上关于 $\{e_n\}$ 的傅立叶级数. 这里 $e_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $e_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x$, $e_3=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x$, $e_4=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x$, $e_5=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x$, …, $e_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$, $e_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$, …

定理 3.4.2 设 U 是内积空间, $\{e_n\}$ 是 U 的标准正交系, 取定 $e_{n_1}, e_{n_2}, \cdots, e_{n_k} \in \{e_n\}$, 记 $M=\operatorname{span}\{e_{n_1}, e_{n_2}, \cdots, e_{n_k}\}$ 为由 $e_{n_1}, e_{n_2}, \cdots, e_{n_k}$ 张成的 k 维子空间, $\forall x \in U$.

$$x_0 = \sum_{i=1}^{k} (x, e_{n_i}) e_{n_i} \tag{3.4-8}$$

是 x 在 M 上的正交投影.

证 由于 M 是 U 的 k 维子空间, 故 M 是 U 的闭的线性子空间, 亦即 M 作为内积空间是完备的. 由投影定理知 x 在 M 中存在唯一的正交投影. 下面验证 x_0 是 x 在 M 中的正交投影.

由于

$$(x_0, e_{n_j}) = \sum_{i=1}^{k} (x, e_{n_i})(e_{n_i}, e_{n_j}) = (x, e_{n_j}) \qquad j=1, 2, \cdots, k$$

故有

$$(x-x_0, e_{n_i}) = (x, e_{n_i}) - (x_0, e_{n_i}) = 0$$

$\forall y \in M$, 则 $y=\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_{n_i}$, $\alpha_i \in \Lambda$, 且有

$$(x-x_0, y) = \sum_{i=1}^{k} \bar{\alpha}_i (x-x_0, e_{n_i}) = 0$$

这说明 $(x-x_0) \perp M$, 所以 x_0 是 x 在 M 上的直交投影. □

定理 3.4.3(最佳逼近定理) 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 U 的标准正交系, $x \in U$, $\{c_k\}=\{(x, e_k)\}$, $k=1, 2, \cdots, n$, 则对任何数组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$, $\alpha_k \in \Lambda$, 有

$$\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \| \leqslant \| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \| \tag{3.4-9}$$

证 记 $x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$, 由定理 3.4.2 知, x_n 是 x 在 $M_n=\operatorname{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 中的正交投影, 则 $x-x_n = x-\sum_{k=1}^{n} c_k e_k \in M^{\perp}$. 而

$$x_n' = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in M$$

故

$$x_n - x_n' = \sum_{k=1}^{n} (c_k - \alpha_k) e_k \in M$$

应用勾股定理有

$$
\begin{aligned}
\left\| x-\sum_{k=1}^{n} c_k' e_k \right\|^2 &= \| (x-x_n)+(x_n-x_n') \|^2 \\
&= \| x-x_n \|^2 + \| x_n - x_n' \|^2 \\
&= \left\| x-\sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 + \| x_n - x_n' \|^2 \\
&\geqslant \left\| x-\sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2
\end{aligned}
$$

□

注 3.4.2 (3.4-9)式说明，当用 n个标准正交向量的线性组合来逼近 U的向量 x时，只有取系数为傅立叶系数，逼近程度最好.

下面的定理刻画了傅立叶系数的某些性质.

定理 3.4.4(贝塞尔(Bessel)不等式) 设$\{e_n\}$是内积空间 U的标准正交系，则$\forall x\in U$，$c_k=(x, e_k)$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|x\|^2 \tag{3.4-10}$$

(3.4-10)式称为 Bessel 不等式.

证 令 $x_n=\sum_{k=1}^{n} c_k e_k$，由定理 3.4.2 知，$(x-x_n)\perp x_n$，由勾股定理有

$$\|x\|^2 = \|(x-x_n)+x_n\|^2 = \|x-x_n\|^2 + \|x_n\|^2 \geqslant \|x_n\|^2$$

$$
\begin{aligned}
\|x_n\|^2 &= (x_n, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j e_j, \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j e_j, c_k e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{c}_k (e_j, e_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{c}_k = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2
\end{aligned}
$$

于是有

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leqslant \|x\|^2$$

令 $n\to\infty$，则有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|x\|^2$$

□

注 3.4.3 由定理的证明，得到一个常用的公式

$$\|x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \tag{3.4-11}$$

由定理 3.4.4 可知，$\forall x\in U$，x的傅立叶系数$\{c_k\}=\{(x, e_k)\}$是平方可和的，即$\{c_k\}\in l^2$. 写成如下推论.

推论 3.4.1 设$\{e_n\}$是内积空间 U中的标准正交系，$x\in U$，$\{c_k\}=\{(x, e_k)\}$是傅里叶系数，则$\{c_k\}\in l^2$. □

由定理 3.4.2 知，当 $x\in U$，对任何 n，

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$$

是 x 在 $M_n=\text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 中的正交投影. 定理 3.4.3 说明，x_n 较 M_n 中其它元 y 更接近于 x，即 x_n 到 x 的距离最小. 自然要问：当 $n\to\infty$ 时，x_n 是否收敛于 x 呢？也就是 x 的傅立叶级数是否收敛于 x？下面来讨论这一问题.

定理 3.4.5(傅立叶级数收敛的充要条件) 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 U 的标准正交系，$x\in U$，则 x 关于 $\{e_n\}$ 的傅立叶级数收敛于 $x\Longleftrightarrow$ 公式

$$\| x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \tag{3.4-12}$$

成立，称(3.4-12)式为巴塞弗(Parseval)公式.

证 取 $x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$，则 $x-x_n\perp x_n$，由勾股定理及(3.4-11)式可得

$$\| x-\sum_{k=1}^{n} c_k e_k\|^2 = \| x-x_n\|^2 = \| x\|^2 - \| x_n\|^2$$

$$= \| x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\| x-\sum_{k=1}^{n} c_k e_k\| = 0 \Longleftrightarrow \| x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$ □

我们知道，对于 n 维欧氏空间而言，如果基向量的个数小于 n，则空间中的一些向量就无法用这些基向量的线性组合来表示. 此时可认为基向量没有选"完全". 只有基向量的个数等于 n，才能认为基向量是完全的. 对于一般的内积空间 U(维数无限)，如何确认其基向量是否完全呢？为此引入以下定义.

定义 3.4.3(完全性) 称内积空间 U 中的标准正交系 $\{e_n\}$ 是完全的是指：在 U 中没有与所有 e_n，$n=1, 2, 3, \cdots$ 都正交的非零元素. 也就是说，如果 $x\perp e_n$，$n=1, 2, 3, \cdots$，则 $x=0$.

可以验证：三角函数系(3.4-3)式是 $L^2[-\pi, \pi]$ 上的完全标准正交系；用 Legendre 多项式表示的正交系(3.4-5)式是 $L^2[-1, 1]$ 上的完全标准正交系. 关于更多的完全标准正交系可参看文献[13].

定理 3.4.6(正交系完全的充要条件) 设 H 是 Hilbert 空间，则以下命题等价：

(1) $\{e_n\}$ 是 H 中的完全标准正交系；

(2) $\forall x\in H$，x 关于 $\{e_n\}$ 的傅立叶级数收敛于自身，即 $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$；

(3) $\forall x\in H$，Parseval 公式成立，即

$$\| x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$

证 (1)⇒(2). 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的完全标准正交系，令 $M=\text{span}\{e_n\}$，可证 $\overline{M}=H$，否则，$\exists\, x\in H-\overline{M}$，$x\neq 0$，且有分解式 $x=x_0+z$，$x_0\in\overline{M}$，$z\in\overline{M}^{\perp}$. 显然 $z\neq 0$，则 $z\perp e_n$，$n=1, 2, 3, \cdots$，这与 $\{e_n\}$ 完全相矛盾，即 M 在 H 中稠密. 由此 $\forall\, x\in H$，$\forall\, \varepsilon>0$，$\exists\, y' = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \in M$，使得

$$\| x - y' \| = \| x - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \| < \varepsilon$$

由定理 3.4.3 的(3.4-9)式，有

$$\| x - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k \| \leqslant \| x - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \| < \varepsilon$$

故当 $m > N$ 时，由勾股定理，有

$$\begin{aligned} \| x - \sum_{k=1}^{m} c_k e_k \|^2 &= \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{m} | c_k |^2 \\ &\leqslant \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{N} | c_k |^2 \\ &= \| x - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k \|^2 < \varepsilon^2 \end{aligned}$$

令 $m \to +\infty$，有

$$\| x - \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

由 $\varepsilon > 0$ 任意知

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$$

(2)⇒(3). 由定理 3.4.5 可得.

(3)⇒(1). 设 $\forall x \in H$，有 $\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | c_k |^2$，如果 $x \perp e_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$，则 $c_k = (x, e_k) = 0$，故 $\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | c_k |^2 = 0$，从而 $x = 0$，即$\{e_n\}$是 H 中的完全标准正交系.

□

3.4.3 可分的希尔伯特空间的模型

为了更方便地研究希尔伯特空间及该空间上的算子，往往把抽象的希尔伯特空间表达成具体的希尔伯特空间. 为此，给出以下的定义.

定义 3.4.4(线性等距同构) 设 U_1 与 U_2 是同一数域 Λ 上的两个内积空间. 如果有 U_1 到 U_2 的一一映射 φ，φ保持线性运算及内积，即 $\forall x, y \in U_1$，$\alpha, \beta \in \Lambda$，有

(1) $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$

(2) $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$

就称 U_1 与 U_2 是同构的(或线性等距同构).

我们可以把两个同构的内积空间看作“**同一**”的，一个可以看作另一个的“**模型**”.

下面讨论希尔伯特空间的模型，按维数，可分为有限维与无限维两种情况.

定理 3.4.7 任何 n 维复希尔伯特空间 H 必与 n 维复欧氏空间 $\boldsymbol{C}^n$ 同构.

证 在 H 取一组基 $g_1, g_2, \cdots, g_n$，用 Gram-Schmidt 方法，可得 H 的标准正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，作 H 到 $\boldsymbol{C}^n$ 的映射 φ，

$$\varphi(x) = ((x, e_1), (x, e_2), \cdots, (x, e_n)) \in \boldsymbol{C}^n$$

容易验证 φ 是 H 到 $\boldsymbol{C}^n$ 的一一映射，且保持线性及内积不变，因此 H 与 $\boldsymbol{C}^n$ 同构. □

对于维数无限的情况，先给出以下的辅助定理.

定理 3.4.8(H可分的充要条件) 无穷维希尔伯特空间 H 可分 $\Longleftrightarrow$ H 有完全标准正交系$\{e_n\}$.

证 $\Rightarrow$ 由于 H 可分，则 H 存在稠密的可列子集$\{g_n\}$，选取$\{g_n\}$的子列$\{g_{n_k}\}$使其线性独立. 做法如下：

设 g_{n_1} 是点列$\{g_n\}$的第一个非零元素，g_{n_2} 是 g_{n_1} 之后第一个与 g_{n_1} 线性无关的元素，g_{n_3} 是 g_{n_2} 之后第一个与 g_{n_1}，g_{n_2} 都线性无关的元素，……，$g_{n_{k+1}}$ 是 g_{n_k} 之后第一个与 g_{n_1}，g_{n_2}，…，g_{n_k} 线性无关的元素，这样就得到了 H 的一个线性独立系. 记 $x_k = g_{n_k}$，则$\{x_k\}$是 H 的线性独立系. 由定理 3.4.1 可将$\{x_k\}$标准正交化为$\{e_k\}$，且$\{x_k\}$与$\{e_k\}$之间有表达式(3.4-4). 下证$\{e_k\}$是 H 的完全标准正交系. 用反证法，若不然，则存在 $x \in H$，使(由定理 3.4.6 及 Bessel 不等式)

$$a = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 > 0$$

因为$\{g_n\}$在 H 中稠密. 所以存在 $g_w \in \{g_n\}$，使 $\|x - g_w\|^2 < a$，可设 $g_w = \sum_{k=1}^{N_0} \alpha_k e_k$，于是有

$$\begin{aligned} a &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{N_0} |c_k|^2 \\ &= \|x - \sum_{k=1}^{N_0} c_k e_k\|^2 \leqslant \|x - \sum_{k=1}^{N_0} \alpha_k e_k\|^2 \\ &= \|x - g_w\|^2 < a \end{aligned}$$

这是一个矛盾，故$\{e_n\}$完全.

$\Leftarrow$ 设 H 中有完全的标准正交系，由定理 3.4.6 知，$\forall x \in H$，有 $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. 故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists n_0$，使

$$\|x - \sum_{k=1}^{n_0} c_k e_k\| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

取 $\sum_{k=1}^{n_0} r_k e_k$(r_1，r_2，…，r_{n_0} 的实部和虚部都是有理数的复数)，使得

$$\begin{aligned} \|\sum_{k=1}^{n_0} c_k e_k - \sum_{k=1}^{n_0} r_k e_k\| &= \|\sum_{k=1}^{n_0} (c_k - r_k) e_k\| \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n_0} (c_k - r_k)^2\right)^{1/2} < \frac{1}{2}\varepsilon \end{aligned}$$

$$\|x - \sum_{k=1}^{n_0} r_k e_k\| \leqslant \|x - \sum_{k=1}^{n_0} c_k e_k\| + \|\sum_{k=1}^{n_0} (c_k - r_k) e_k\| < \varepsilon$$

即 $\left\{\sum_{k=1}^{m} r_k e_k \mid m = 1, 2, 3, \cdots, r_k \text{ 的实部及虚部均为有理数}\right\}$ 在 H 中稠密. 显见该集合是可列集，故 H 可分. □

定理 3.4.9 如果无限维希尔伯特空间 H 可分，则 H 与 l^2 同构.

证 设 H 是无限维可分的希尔伯特空间，根据定理 3.4.8 可知 H 存在完全的标准正

交系$\{e_n\}$，再由定理3.4.6，$\forall x\in H$，有 $x=\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$，且$\{c_k\}\in l^2$. 令 $\varphi: H\to l^2$，

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= ((x, e_1), (x, e_2), \cdots, (x, e_n), \cdots) \\ &= (c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots) \in l^2\end{aligned}$$

先验证 $\varphi: H\to l^2$ 是一一映射.

设 $x, y\in H$，$x=\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$，$y=\sum_{k=1}^{\infty} c'_k e_k$，$x\neq y\Longleftrightarrow \{c_k\}\neq\{c'_k\}$，$\varphi(x)=\{c_k\}\neq\{c'_k\}=\varphi(y)$，即 φ是单射.

$\forall\{c_k\}\in l^2$，作 $x_n=\sum_{k=1}^{n} c_k e_k$，易证$\{x_n\}$是 H中的基本列. 由于 H完备，故 $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ 收敛，即存在 $x\in H$，使 $x=\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$，$\varphi(x)=\{c_k\}$，即 φ是满射，所以 φ是一一映射.

再验证 φ保持线性及内积不变.

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x+\beta y) &= \varphi\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha c_k+\beta c'_k)e_k\right)=\{\alpha c_k+\beta c'_k\} \\ &= \alpha\{c_k\}+\beta\{c'_k\}=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)\end{aligned}$$

$$(\varphi(x), \varphi(y))=(\{c_k\}, \{c'_k\})=\sum_{k=1}^{\infty} c_k \bar{c}'_k$$

$$(x, y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \sum_{k=1}^{\infty} c'_k e_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k \bar{c}'_k$$

即 H与 l^2 是同构的. □

由定理3.4.7、3.4.9可知，**欧氏空间可以看作有限维希尔伯特空间的模型，l^2 可以看作无限维可分的希尔伯特空间的模型**. 从而把对可分的希尔伯特空间的研究转化为对欧氏空间或 l^2 的研究. 例如，$L^2[-\pi, \pi]$是可分的希尔伯特空间，要研究 $L^2[-\pi, \pi]$中的函数，只要研究该函数的傅立叶系数就够了.

习 题 三

1. 设 $X=\mathbf{R}^2$，对 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2)\in\mathbf{R}^2$，证明：

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{x}\|_1=|x_1|+|x_2| \\ &\|\boldsymbol{x}\|_2=(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\|\boldsymbol{x}\|_p=(x_1^p+x_2^p)^{1/p} \qquad p>1 \\ &\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max\{|x_1|, |x_2|\}\end{aligned}$$

均是 X上的范数.

2. 设 l^∞ 是有界实(或复)数列全体按通常的线性运算所成的线性空间. 对 $x\in l^\infty$，设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$，令

$$\|x\|_\infty=\sup_{i\geqslant 1}|x_i|$$

验证：l^{∞}是线性赋范空间.

3. 设 C_0 是收敛于零的数列(实的或复的)的全体，对于 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$，规定 $\|x\|=\sup_{n\geq 1}|x_n|$. 求证：$C_0$ 是 l^{∞} 的闭线性子空间.

4. 设 A 是向量空间 $\boldsymbol{X}$ 的子集，如果 $x, y\in A$，蕴涵

$$M=\{z \mid z=\lambda x+(1-\lambda)y, 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}\subset A$$

则称 A 为凸集. M 称为以 x，y 为端点的闭线段. 试证在线性赋范空间 X 中，闭单位球

$$\overline{B}(0, 1)=\{x \mid \|x\|\leqslant 1\}$$

是凸集.

5. 证明：$\varphi(x_1, x_2)=(|x_1|^p+|x_2|^p)^{1/p}(0<p<1)$ 不是 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)\in\mathbf{R}^2$ 的范数.

6. 设 $V[a, b]$ 表示在 $[a, b]$ 上右连续的有界变差函数的全体，其线性运算与 $C[a, b]$ 中的相同，在 $V[a, b]$ 中定义范数

$$\|x\|=|x(a)|+V_a^b(x)$$

其中 $V_a^b(x)$ 表示 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 上的总变差. 证明：$V[a, b]$ 是一个 Banach 空间.

7. 证明向量空间 $\boldsymbol{X}\neq\{0\}$ 上的离散距离不能由范数导出.

8. 证明：l^{∞} 是不可分的 Banach 空间.

9. 如果在线性赋范空间 X 中，任何级数的绝对收敛总蕴含级数收敛，证明：X 是完备的.

10. 证明：在 Banach 空间中，绝对收敛的级数必收敛.

11. 若 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 是向量空间 X 上的等价范数，证明 $(X, \|\cdot\|)$ 中的 Cauchy 列也是 $(X, \|\cdot\|_1)$ 中的 Cauchy 列.

12. 利用定义直接证明：$\mathbf{R}^n$ 中的范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=(|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|\boldsymbol{x}\|_{\infty}=\max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}$$

是等价的.

13. 在 $\mathbf{R}^2$ 平面上，举出紧和非紧曲线的例子.

14. (局部紧)如果距离空间 X 的每个点都有一个紧邻域，则称 X 是局部紧的. 证明：$\mathbf{R}^1$，$\mathbf{C}^1$，$\mathbf{R}^n$，$\mathbf{C}^n$ 均是局部紧空间.

15. 若 X 是实内积空间，证明 $\|x\|=\|y\|$ 蕴含 $(x+y, x-y)=0$，如果 $X=\mathbf{R}^2$，这在几何上意味着什么？如果 X 是复内积空间，其意味着什么？

16. 证明：在内积空间中，若对所有 x，有 $(x, u)=(x, v)$，则 $u=v$

17. 证明：对内积空间中的序列 $\{x_n\}$，条件

$$\|x_n\|\rightarrow\|x\| \text{ 和 } (x_n, x)\rightarrow(x, x)$$

蕴含 $x_n\rightarrow x$.

18. 证明：在内积空间中，$x\perp y$ 的充分必要条件是对任何 α，$\|x+\alpha y\|\geqslant\|x\|$.

19. 证明：$Y_1=\{x \mid x=(x_j)\in l^2, x_{2n}=0, n=1, 2, 3, \cdots\}$ 为 l^2 的闭子空间，并求 $Y_1^{\perp}$. 若 $Y_2=\mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，$e_j=(\delta_{jn})\in l^2$，求 $Y_2^{\perp}$.

20. 设 A 与 B 是内积空间的非空子集，且 $A\subset B$. 证明：

(1) $B^{\perp}\subset A^{\perp}$；

(2) $((A^{\perp})^{\perp})^{\perp}=A^{\perp}$.

21. 设 $C[-1,1]$是$[-1,1]$上的实值函数空间，定义内积

$$(x, y)=\int_{-1}^{1} x(t) y(t) \mathrm{d} t \qquad x, y \in C[-1,1]$$

若记 M为 $C[-1,1]$中的奇函数的全体，N为 $C[-1,1]$中的偶函数的全体. 证明：$M \perp N$，且 $C[-1,1]=M \oplus N$.

22. 设 $H_n(t)$是埃米特(Hermite)多项式$(-1)^n \mathrm{e}^{t^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d} t^n} \mathrm{e}^{-t^2}$，又

$$\varphi_n(t)=(2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)$$

试证明：$\{\varphi_n\}$，$n=0,1,2,\cdots$，组成 $L^2(-\infty,+\infty)$中的标准正交系.（提示：$H_n'(t)=2 n H_{n-1}(t)$.）

23. 设$\{e_k\}$是希尔伯特空间 H中标准正交系，$Y=\operatorname{span}\{e_k\}$，证明：$x \in \bar{Y}$的充分必要条件是 x可以表示成 $x=\sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k) e_k$.

24. 设$\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$是希尔伯特空间 H中的完全标准正交系，又设$\{f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots\}$是 H中的一个标准正交系，满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|e_k-f_k\|^2<+\infty$$

证明：$\{f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots\}$也是 H中的完全标准正交系.

25. 设 $U_1, U_2, \cdots, U_n, \cdots$是一列内积空间，令

$$U=\{\{x_n\} \mid x_n \in U_n, \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty\}$$

在 U中定义运算：

$$\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}=\{\alpha x_n+\beta y_n\} \qquad \alpha, \beta \text{为复数}$$

并定义内积

$$(\{x_n\},\{y_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)$$

证明 U是内积空间.

26. 设$\{e_n\}$是内积空间 U的标准正交系，如果对任何 $x \in H$，Parseval 公式成立，就称正交系$\{e_n\}$是完备的. 证明：如果$\{e_n\}$是完备的，则$\{e_n\}$是完全的；反之，如果$\{e_n\}$是完全的且 U是希尔伯特空间，则$\{e_n\}$必是完备的.

第四章　线性泛函与线性算子

在微积分中，曾研究过实直线上的实值函数，这种函数是实数集到实数集的映射. 在泛函分析中，我们要研究一般空间之间的映射. 从线性赋范空间 X 到另一线性赋范空间 Y 的映射，称为算子. 如果 Y 是数域，称这种算子为泛函. 这里我们最感兴趣，也是最简单的算子(或泛函)是保持两种代数运算的算子(或泛函)，即所谓的线性算子(或泛函). 这一章，先介绍线性泛函及其延拓定理，再介绍线性算子的一般理论.

4.1　线性连续泛函与共轭空间

4.1.1　线性泛函的概念及例子

定义 4.1.1(线性泛函)　设 X 是实(或复)数域 Λ 上的线性赋范空间，D 是 X 的线性子空间，$f: D\to\Lambda$，如果 f 满足：$\forall\ \alpha,\ \beta\in\Lambda,\ x,\ y\in D$，

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y) \tag{4.1-1}$$

则称 f 是 D 上的一个线性泛函，称 D 为 f 的定义域，$f(D)=\{f(x)\mid x\in D\}$ 为 f 的值域.

如果 $\Lambda=\mathbf{R}^1$，称 f 是实线性泛函，若 $\Lambda=\mathbf{C}$，称 f 是复线性泛函. 没有特别说明，总假定 $\Lambda=\mathbf{R}^1$. 若 $D=X$，则称 f 是 X 上的线性泛函.

定义 4.1.2(线性有界)　设 $f: D(\subset X)\to\mathbf{R}^1$ 是线性泛函，如果存在 $M>0$，对任何 $x\in D$，有

$$|f(x)|\leqslant M\|x\| \tag{4.1-2}$$

则称 f 是 D 上的线性有界泛函.

注 4.1.1　这里有界的概念与微积分中有所不同. 例如：函数 $f(x)=x$ 在 $\mathbf{R}^1=(-\infty,+\infty)$ 上是无界函数，但作为 $\mathbf{R}^1$ 到 $\mathbf{R}^1$ 的线性泛函却是线性有界泛函. 事实上，取 $M=1$，对 $x\in(-\infty,+\infty)$，$|f(x)|=|x|\leqslant M|x|$.

例 4.1.1　求实 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上的线性有界泛函.

解　设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的固定向量，$\forall\ \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，令

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i$$

则 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性有界泛函. 事实上，$\forall\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，有

$$\begin{aligned}f(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})&=\sum_{i=1}^{n}a_i(\alpha x_i+\beta y_i)=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_i x_i+\beta\sum_{i=1}^{n}a_i y_i\\&=\alpha f(\boldsymbol{x})+\beta f(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

即 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性泛函. 根据 Hölder 不等式，有

$$|f(x)|=\left|\sum_{i=1}^{n}a_i x_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i x_i|$$
$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|a\|\,\|x\|$$

所以 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性有界泛函.

定义 4.1.3(线性连续) 设 $f: D(\subset X)\to\mathbf{R}^1$(或复数域 $\mathbf{C}$)是线性泛函，且 $f(x)$在 D上连续，则称 f是 D上的线性连续泛函.

关于连续泛函的概念，只要把第二章定义 2.1.8 中的(Y, d_2)改写成 $\mathbf{R}^1$(或 $\mathbf{C}$)即可得到. 对于线性连续泛函，还有以下的性质.

定理 4.1.1 设 D是 X的线性子空间，$f: D\to\mathbf{R}^1$，则 $f(x)$在 D上连续$\Longleftrightarrow f(x)$在某一点 $x_0\in D$处连续.

证 $\Rightarrow$ 显然成立.

$\Leftarrow$ 设$\{x_n\}\subset D$，$x\in D$，$x_n\to x(n\to\infty)$，则 $x_n-x+x_0\to x_0$，由假设知

$$f(x_n-x-x_0)=f(x_n)-f(x)-f(x_0)\to f(x_0)\qquad(n\to\infty)$$

即 $f(x_n)\to f(x)\ (n\to\infty)$，所以 f在 x点连续. □

由于 X的线性子空间包含 0，又 $f(0)=0$，故要检验 f在 D上连续只要验证 f在 $x_0=0$ 点连续就够了.

定理 4.1.2(有界性与连续性) 设 f是 $D(\subset X)$上的线性泛函，则 f在 D上连续$\Longleftrightarrow$ f在 D上有界.

证 $\Rightarrow$ 如果 f在 D上无界，则 $\forall n$, 存在 $x_n\in D$, 使 $|f(x_n)|\geqslant n\|x_n\|$，取 $\tilde{x}_n=\dfrac{x_n}{n\|x_n\|}$，则 $\|\tilde{x}_n\|=\dfrac{1}{n}\to 0$，而$|f(\tilde{x}_n)|=\dfrac{1}{n\|x_n\|}|f(x_n)|\geqslant\dfrac{1}{n\|x_n\|}n\|x_n\|=1$，这与 f在 $x_0=0$点连续矛盾，所以 f在 D上有界.

$\Leftarrow$ 设 f在 D上有界，则$\exists M>0$，$\forall x_n\in D$, $x_n\to 0(n\to\infty)$，有

$$|f(x_n)|\leqslant M\|x_n\|\to 0\qquad n\to\infty$$

从而 f在 $x_0=0$点连续，由定理 4.1.1 知 f在 D上连续. □

例 4.1.2 $\forall x\in X$, 定义 $\theta(x)=0$，则 θ是 X上的线性连续泛函，称为零泛函.

例 4.1.3 对 $x\in C[a, b]$，令 $f(x)=\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t$，则$\forall x, y\in C[a, b]$，有

$$\begin{aligned}f(\alpha x+\beta y)&=\int_a^b[\alpha x(t)+\beta y(t)]\,\mathrm{d}t\\&=\alpha\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t+\beta\int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t\\&=\alpha f(x)+\beta f(y)\end{aligned}$$

故 f是 $C[a, b]$上的线性泛函. 由于

$$\begin{aligned}|f(x)|&=\left|\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b|x(t)|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\int_a^b\mathrm{d}t=(b-a)\|x\|\end{aligned}$$

故 f是 $C[a, b]$上的线性有界泛函(或线性连续泛函).

例 4.1.4 设 X是线性赋范空间，则 X的范数$\|x\|$定义了一个泛函

$$f = \| \cdot \| : X \to \mathbf{R}^1$$

对任何 $x \in X$, 有 $f(x) = \|x\|$, f是有界的，但不是线性的.

事实上，取 $M=1$，则 $\forall\ x \in X$,

$$|f(x)| = \|x\| \leqslant M\|x\|$$

即 f是有界的. 下证 f是非线性的. 若 f线性，取 $x \neq 0$，由于 $0 = x + (-x)$，故有

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x+(-x)) = f(x) + f(-x) \\ &= \|x\| + \|-x\| \\ &= 2\|x\| \neq 0 \end{aligned}$$

这与 $f(0)=0$ 矛盾，故 f是非线性的.

4.1.2 共轭空间

下面我们着重讨论由线性赋范空间 X的全体有界线性泛函组成的集合 X^*.

$$X^* = \{f \mid f: X \to \mathbf{R}^1,\ f\text{线性有界}\} \tag{4.1-3}$$

显然 $\theta \in X^*$，故 $X^* \neq \varnothing$. 对于任何 f_1，$f_2 \in X^*$，定义加法与数乘如下：

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \tag{4.1-4}$$

则 X^* 构成一个线性空间. 如果能在 X^* 上定义范数，则 X^* 成为线性赋范空间.

由于 $\forall\ x \in X$, 有 $|f(x)| \leqslant M\|x\|$，当 $x \neq 0$ 时，有

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant M$$

即数集 $\left\{ \dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \,\middle|\, x \in X,\ x \neq 0 \right\}$是有界集，故它的上确界必存在. 这样我们给出下面定义.

定义 4.1.4(泛函范数) 设 $f \in X^*$，定义 f的范数为

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{4.1-5}$$

可以验证：$\|f\|$ 满足范数的三条公理. 事实上，

(1) $\forall\ f \neq \theta$, 有 $\|f\| > 0$，$\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = \theta$;

(2) 对 $\alpha \in \mathbf{R}^1$，有 $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|$；

(3)
$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{|f_1(x) + f_2(x)|}{\|x\|} \\ &\leqslant \sup_{x \neq 0} \frac{|f_1(x)|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{|f_2(x)|}{\|x\|} \\ &= \|f_1\| + \|f_2\| \end{aligned}$$

这样，线性赋范空间 X上线性有界泛函的全体 X^* 是一线性赋范空间，这个空间称为 X的**共轭空间**.

注 4.1.2 由定义 4.1.4，当 $f \in X^*$，$x \in X$时，有

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\| \tag{4.1-6}$$

注 4.1.3 如果 f是线性有界泛函，f的范数有如下的等价形式：

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \quad \text{或} \quad \|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \tag{4.1-7}$$

事实上，由定义 4.1.4，有

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0}\left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|$$
$$= \sup_{\|y\|=1}|f(y)| \leqslant \sup_{\|y\|\leqslant 1}|f(y)|$$
$$\leqslant \sup_{\|y\|=1}\|f\|\ \|y\| = \|f\| \qquad \square$$

例 4.1.5 求通过

$$f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{1} x(t)\,\mathrm{d}t$$

定义的 $C[-1, 1]$上的线性泛函 f 的范数.

解 显见 f 是 $C[-1, 1]$上的线性泛函. $\forall\ x\in[-1, 1]$, 有

$$|f(x)| = \left|\int_{-1}^{0} x(t)\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{1} x(t)\,\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant \int_{-1}^{0}|x(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1}|x(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \max_{t\in[-1,1]}|x(t)|\left(\int_{-1}^{0}\mathrm{d}t + \int_{0}^{1}\mathrm{d}t\right) = 2\|x\|$$

故 $\|f\|\leqslant 2$. 另一方面, 取 $x_n\in C[-1, 1]$, 且 $\|x_n\|=1$, x_n 定义为

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & t\in\left[-1, -\dfrac{1}{n}\right] \\ -nt & t\in\left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \\ -1 & t\in\left[\dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

对任何 n, $x_n(t)\in C[-1, 1]$,

$$|f(x_n)| = \left|\int_{-1}^{0} x_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{1} x_n(t)\,\mathrm{d}t\right| = 2 - \frac{1}{n}$$

再由(4.1-7)式得

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1}|f(x)| \geqslant \sup_{n\geqslant 1}|f(x_n)| = 2$$

所以 $\|f\| = 2$.

下面讨论 X的共轭空间 X^* 的性质.

定理 4.1.3(X^* 的完备性) 设 X是线性赋范空间, 则其共轭空间 X^* 是 Banach 空间.

证 设$\{f_n\}$是 X^* 基本列, 要证$\{f_n\}$收敛于 $f\in X^*$. 由基本列的定义, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ N$, 当 m, $n>N$时, 有 $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$ 于是 $\forall\ x\in X$, 有

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \|f_m - f_n\|\ \|x\| < \varepsilon\|x\| \tag{4.1-8}$$

由此可知$\{f_n(x)\}$是 $\mathbf{R}^1$ 中的基本列, 由 $\mathbf{R}^1$ 的完备性知, $\{f_n(x)\}$在 $\mathbf{R}^1$ 中收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall\ x\in X$. 可验证 f是线性有界泛函.

$$f(\alpha x+\beta y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha x+\beta y) = \alpha\lim_{n\to\infty} f_n(x) + \beta\lim_{n\to\infty} f_n(y)$$
$$= \alpha f(x) + \beta f(y)$$

取 N_1, 当 $m>n>N_1$ 时, $\|f_m - f_n\| < 1$, 则 $\|f_m\| \leqslant \|f_n\| + 1$. $\forall\ x\in X$, 有

$$|f_m(x)| \leqslant \|f_m\|\ \|x\| \leqslant (\|f_n\| + 1)\|x\|$$

让 $n>N_1$ 固定, 令 $m\to\infty$, 有

$$|f(x)|\leqslant(\|f_0\|+1)\|x\|$$

这就证明了 f 是 X 上的线性有界泛函，即 $f\in X^*$. 下面要证 $\{f_n\}$ 依范数收敛于 f. 在 (4.1-8)式中，令 $m\to\infty$，$n>N$ 固定，得

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon\|x\|$$

由范数定义可知，当 $n>N$ 时有 $\|f-f_n\|\leqslant\varepsilon$，即 $f_n\to f\ (n\to\infty)$. □

4.1.3 几个具体空间上线性连续泛函的一般形式

(1) 实 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的共轭空间是 $\mathbf{R}^n$ 自身.

证 在例 4.1.1 中，证明了：对 $\forall\ \boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，形如

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i \tag{4.1-9}$$

的泛函是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性有界泛函. 现在我们证明 $\mathbf{R}^n$ 上的任何线性有界泛函 f 只能是(4.1-9)式的形式.

取 $\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基：$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，其中

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0),\ \boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\cdots,0),\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)$$

$\forall\ \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i$，$\forall\ f\in(\mathbf{R}^n)^*$，令 $f(\boldsymbol{e}_i)=a_i$，则有

$$f(\boldsymbol{x})=f\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}x_if(\boldsymbol{e}_i)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$$

这说明 $\mathbf{R}^n$ 上的连续线性泛函的一般表达式是(4.1-9)式.

下面求 f 的范数. 一方面，由 $\forall\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，

$$|f(\boldsymbol{x})|=\Big|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\Big|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}=\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{x}\|$$

$$\Rightarrow\|f\|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{4.1-10}$$

另一方面，特取 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=|f(\boldsymbol{a})|\leqslant\|f\|\|\boldsymbol{a}\|=\|f\|\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow\|f\|\geqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{4.1-11}$$

结合(4.1-10)、(4.1-11)式可得

$$\|f\|=\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{4.1-12}$$

上面的论证说明 $\mathbf{R}^n$ 上的线性有界泛函的一般形式是(4.1-9)式，我们可以通过(4.1-9)式把 f 与 $\boldsymbol{a}$ 相对应，记为 φ: $f\mapsto\boldsymbol{a}$. 容易看出，φ 建立了 $(\mathbf{R}^n)^*$ 与 $\mathbf{R}^n$ 的一一对应，并且 φ 保持线性不变，再由(4.1-12)式可知 φ 还保持距离不变，因此 $(\mathbf{R}^n)^*$ 与 $\mathbf{R}^n$ 是等距线性同构的. 按照同一性的观点，把 $(\mathbf{R}^n)^*$ 与 $\mathbf{R}^n$ 看成同一空间，从而有

$$(\mathbf{R}^n)^*=\mathbf{R}^n$$

这样，我们说 $\mathbf{R}^n$ 的共轭空间是 $\mathbf{R}^n$ 自身. □

(2) l^p 的共轭空间是 l^q，其中 $1<p<+\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证 先证 $\forall f\in(l^p)^*$，$\exists y=(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)\in l^q$，使当 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in l^p$ 时，有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i \tag{4.1-13}$$

为此，取 $e_i=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)$，$e_i$ 的第 i 个坐标为 1，其余坐标为 0($i=1,2,3,\cdots$)，$e_i\in l^p$. 记 $y_i=f(e_i)$，$i=1, 2, 3, \cdots$，现在证 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)\in l^q$，即 $\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q<+\infty$. 在 l^p 中取一点列 $x^{(m)}=(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_i^{(m)}, \cdots)$，其定义如下：

$$x_i^{(m)}=\begin{cases}|y_i|^{q-1}\operatorname{sgn} y_i & i\leqslant m\\ 0 & i>m\end{cases}$$

对于每个 m，$x^{(m)}$ 只有有限个坐标不为零，故 $x^{(m)}\in l^p$.

$$f(x^{(m)})=\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{(m)} f(e_i)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{(m)} y_i=\sum_{i=1}^{m}|y_i|^q$$

$$\|x^{(m)}\|_p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{m}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{|f(x^{(m)})|}{\|x^{(m)}\|_p}=\frac{\sum_{i=1}^{m}|y_i|^q}{\left(\sum_{i=1}^{m}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}}=\left(\sum_{i=1}^{m}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|$$

令 $m\to\infty$，有

$$\|y\|_q \overset{\text{def}}{=\!=} \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\| \tag{4.1-14}$$

当 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in l^p$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)\in l^q$ 时，根据 Hölder 不等式，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i y_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.1-15}$$

可知数项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i$ 是绝对收敛级数. 因此，由 f 的连续性及 $x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$，有

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i=\sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i\end{aligned}$$

即(4.1-13)式成立.

再证 $\forall y=(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)\in l^q$，由(4.1-13)式定义的 f 是 l^p 上的线性连续泛函. f 显见是线性泛函，$\forall x\in l^p$，由(4.1-15)式知

$$|f(x)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i\right|\leqslant\|y\|_q\|x\|_p$$

$$\|f\|\leqslant\|y\|_q \tag{4.1-16}$$

所以由(4.1−13)式定义的 f 是 l^p 上的线性有界泛函．再由(4.1−14)、(4.1−16)式知

$$\|f\| = \|y\|_q \tag{4.1−17}$$

由(4.1−13)式建立了$(l^p)^*$与 l^q之间的一一映射 φ：$(l^p)^* \to l^q$，$\varphi(f)=y$．可验证 φ保持线性，是保持距离(范数)，则在等距同构的意义下有$(l^p)^*=l^q$． □

特别地，当 $p=q=2$ 时，有$(l^2)^*=l^2$．

注 4.1.4 l^1 是 $p=1$ 的特殊情况，我们称$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的 p，q为一对**共轭数**．自然地，也把 1，∞看作一对共轭数，根据上述的结果，应该有$(l^1)^*=l^\infty$．这里指出：这个结论是正确的(证略)．这里仅给出 l^∞ 的概念及简单性质．

l^∞ 是有界数列的全体，即

$$l^\infty=\{x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mid \sup_{i\geq 1}|x_i|<+\infty\}$$

它具有以下的性质(参看本章习题 2、第三章习题 8)．

① 在 l^∞ 上定义距离 $d(x, y)=\sup_{i\geq 1}|x_i-y_i|$，在 $d(x, y)$之下 l^∞ 是完备的距离空间；

② 在 l^∞ 上可以定义范数：$\|x\|=\sup_{i\geq 1}|x_i|$．由范数导出的距离是 $d(x, y)=\sup_{i\geq 1}|x_i-y_i|$，在通常的加法及数乘下，$l^\infty$ 是 Banach 空间；

③ 对于 $1\leqslant p<+\infty$，l^p 是可分的，而 l^∞ 是不可分的(参看文献[1])；

④ l^1 的共轭空间$(l^1)^*=l^\infty$．

(3) $L^p[a, b]$($1\leqslant p<+\infty$)的共轭空间是 $L^q[a, b]$．$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$．

其证明确实不易，证明略去．这里仅指出 $L^p[a, b]$上的线性有界泛函 f 与 $L^q[a, b]$中的元素之间的一一对应关系．

对于 $\beta\in L^q[a, b]$，可以定义 $L^p[a, b]$上的线性泛函

$$f(x)=\int_a^b x(t)\beta(t)\,\mathrm{d}t \qquad \forall\, x\in L^p[a, b] \tag{4.1−18}$$

且 f是有界的．事实上

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|\int_a^b x(t)\beta(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |\beta(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|x\|_p\|\beta\|_q\end{aligned}$$

$$\|f\|\leqslant\|\beta\|_q$$

另一方面，$\forall f\in(L^p[a, b])^*$，可以找到唯一 $\beta\in L^q[a, b]$，使(4.1−18)式成立(参看文献[1])，且有

$$\|\beta\|_q\leqslant\|f\|$$

由(4.1−18)式建立了$(L^p[a, b])^*$与 $L^q[a, b]$的一一对应 φ，φ保持线性与范数($\|f\|=\|\beta\|_q$)．故在等距同构意义之下，$(L^p[a, b])^*=L^q[a, b]$． □

特别地，当 $p=q=2$ 时，有$(L^2[a, b])^*=L^2[a, b]$．

(4) $C[a, b]$的共轭空间是 $V_0[a, b]$．

$C[a, b]$上的线性有界泛函与 $V_0[a, b]$中的元素的对应关系是：对于 $g(t)\in V_0[a, b]$，可以定义 $C[a, b]$上的线性泛函 f，即

$$f(x)=\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}g(t) \qquad \forall\ x\in C[a,\ b] \tag{4.1-19}$$

这个结果称为黎兹(Riesz)定理，其证明放在4.2节中(定理4.2.2).

为了解释(4.1-19)式的含义，要有以下的概念.

(i) 黎曼—斯蒂阶斯(Riemann-Stieltjes)积分.

设 $x(t)\in C[a,\ b]$，$g(t)$在$[a,\ b]$上有定义.

分割 T：$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. 记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta t_i$，取 $\xi_i\in[t_{i-1},\ t_i]$，作积分和：

$$S_T=\sum_{i=1}^{n} x(\xi_i)[g(t_i)-g(t_{i-1})]$$

如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0} S_T=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} x(\xi_i)[g(t_i)-g(t_{i-1})]$$

存在，则称 $x(t)$关于 $g(t)$ R-S可积，称该极限值为 $x(t)$关于 $g(t)$的Riemann-Stieltjes积分，记为$\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}g(t)$.

特别地，取 $g(t)=t$，则R-S积分就是Riemann积分.

关于R-S积分的存在性，有以下的结果：如果 $g(t)$是$[a,\ b]$上的有界变差函数，则$\forall\ x\in C[a,\ b]$，$x(t)$关于 $g(t)$的R-S积分存在.

(ii) $g(t)$是$[a,\ b]$上的有界变差函数是指：存在 $M>0$，对$[a,\ b]$的任何分割 T，g对分割 T的变差

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i)-g(t_{i-1})|\leqslant M$$

称
$$\sup_T\sum_{i=1}^{n} |g(t_i)-g(t_{i-1})| \xlongequal{\text{def}} V_a^b(g)$$

为 $g(t)$在$[a,\ b]$上的总变差. 记

$$V[a,\ b]=\{g(t)\mid g(t)\text{ 为}[a,\ b]\text{上的有界变差函数}\}$$

容易验证：$V[a,\ b]$构成线性空间.

$$V_0[a,\ b]\xlongequal{\text{def}}\{g(t)\mid g(t)\in V[a,\ b],\ g(a)=0,\ g(t)\text{ 右连续}\}$$

则 $V_0[a,\ b]$是 $V[a,\ b]$的线性子空间. 在 $V_0[a,\ b]$上，令

$$\|g\|=V_a^b(g)=\sup_T\sum_{i=1}^{n} |g(t_i)-g(t_{i-1})|$$

则 $V_0[a,\ b]$是线性赋范空间.

(4.1-19)式是以关于 $g(t)$的R-S积分，它定义了 $C[a,\ b]$上的线性泛函 f. 可以证明(较困难)

$$\|f\|=\|g\|$$

反过来，$\forall\ f\in(C[a,\ b])^*$，可以确定 $g(t)\in V_0[a,\ b]$，使(4.1-19)式成立，可以在$(C[a,\ b])^*$与 $V_0[a,\ b]$之间建立映射 φ：$(C[a,\ b])^*\to V_0[a,\ b]$，使$(C[a,\ b])^*$与 $V_0[a,\ b]$是等距同构的，故

$$(C[a,\ b])^*=V_0[a,\ b]$$

4.1.4 希尔伯特空间中线性连续泛函的表示

在上一段中，我们看到希尔伯特空间 $\mathbf{R}^n$，l^2 的共轭空间是它们自身，这些空间上的连续线性泛函都可以用内积来表示，即

$$f(x) = (x, y)$$

自然地，人们会猜想对一般的希尔伯特空间，也应有同样的结果.

定理 4.1.4(黎兹(Riesz)表现定理) 设 H 是希尔伯特空间，f 是 H 上的线性连续泛函，则存在唯一的 $z \in H$，满足：

$$f(x) = (x, z) \qquad \forall x \in H \tag{4.1-20}$$

$$\| f \| = \| z \| \tag{4.1-21}$$

证 分三步证明.

(1) **存在性**. 若 $f = \theta$(θ为零泛函)，则可取 $z = 0$. 若 $f \neq \theta$，令

$$N(f) = \{ x \mid f(x) = 0, x \in H \}$$

则称 $N(f)$ 为 f 的**零空间**. 显见，$N(f)$ 是 H 的闭线性子空间，且 $N(f) \neq H$. 于是 $(N(f))^{\perp} \neq \{0\}$，因此存在 $z_0 \in (N(f))^{\perp}$，$z_0 \neq 0$，令

$$v = f(x) z_0 - f(z_0) x \qquad x \in H$$

则有 $f(v) = f(x) f(z_0) - f(z_0) f(x) = 0$，这说明 $v \in N(f)$，故 $v \perp z_0$，从而有

$$(v, z_0) = f(x)(z_0, z_0) - f(z_0)(x, z_0) = 0$$

由于 $z_0 \neq 0$，故有 $(z_0, z_0) = \| z_0 \|^2 \neq 0$，从上式解出 $f(x)$，得

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\| z_0 \|^2}(x, z_0)$$

取 $z = \overline{\dfrac{f(z_0)}{\| z_0 \|^2}} z_0$，则有

$$f(x) = (x, z)$$

(2) **唯一性**. 设有 $z_1 \in H$，满足：

$$f(x) = (x, z_1) \qquad \forall x \in H$$

则有 $(x, z_1) = (x, z)$，$\forall x \in H$，等价于 $(x, z_1 - z) = 0$，$\forall x \in H$. 特取 $x = z_1 - z$，有

$$(z_1 - z, z_1 - z) = \| z_1 - z \|^2 = 0$$

由此推得 $z_1 = z$，唯一性得证.

(3) **证(4.1-21)式成立**. 一方面，根据 Schwarz 不等式，有

$$| f(x) | = | (x, z) | \leqslant \| x \| \| z \| \Rightarrow \| f \| \leqslant \| z \|$$

另一方面，由于

$$\| z \|^2 = | (z, z) | = | f(z) | \leqslant \| f \| \| z \| \Rightarrow \| z \| \leqslant \| f \|$$

故有 $\| f \| = \| z \|$.

注 4.1.5 有了 Riesz 表现定理，确定希尔伯特空间上连续线性泛函的形式将十分方便.

例 4.1.6 $L^2[a, b]$ 是实的希尔伯特空间，$\forall f \in (L^2[a, b])^*$，存在唯一的 $y(t) \in L^2[a, b]$，对 $\forall x(t) \in L^2[a, b]$，有

$$f(x)=\int_a^b x(t)\overline{\beta(t)}\,\mathrm{d}t$$

且有

$$\|f\|=\|\beta\|$$

注 4.1.6 Riesz 表现定理指出，$\forall f\in H^*$，存在唯一 $z\in H$，使

$$f(x)=(x, z) \quad 且 \quad \|f\|=\|z\|$$

反过来，$\forall z\in H$，故(4.1-20)式确定 H的线性连续泛函.

$$f(x)=(x, z) \qquad \forall x\in H$$

同样还有 $\|f\|=\|z\|$. 由(4.1-20)式定义 $H\to H^*$ 的映射 φ：

$$\varphi(z)=f_z \tag{4.1-22}$$

这里用 f_z 表示 z 在 φ作用下的象. z_1+z_2 在 φ作用下的象为 $f_{z_1+z_2}$，

$$\begin{aligned} f_{\alpha z_1+\beta z_2}(x) &= (x, \alpha z_1+\beta z_2)=(x, \alpha z_1)+(x, \beta z_2) \\ &= \bar{\alpha}(x, z_1)+\bar{\beta}(x, z_2)=\bar{\alpha}f_{z_1}(x)+\bar{\beta}f_{z_2}(x) \end{aligned}$$

故

$$f_{\alpha z_1+\beta z_2}=\bar{\alpha}f_{z_1}+\bar{\beta}f_{z_2}$$

即

$$\varphi(\alpha z_1+\beta z_2)=\bar{\alpha}\varphi(z_1)+\bar{\beta}\varphi(z_2)$$

因此映象 φ是可加的且是共轭齐次的，称 φ是**共轭线性映射**，由(4.1-22)式易知 φ是一一映射，再由(4.1-21)式知 φ是保距的. 我们将 H与 H^* 看作共轭线性(等距)同构的，并把 z与 f_z 看成相同的. 这样，H^* 与 H就“同一”化了. 因此，称希尔伯特空间是自共轭的. 在共轭线性同构意义下，有

$$H^*=H$$

4.2 线性泛函的延拓

在 4.1 节中，具体给出了几个常见空间上线性连续泛函的一般形式，并看到在这些空间上存在相当多的非零线性连续泛函. 大家自然要问：对于一般的线性赋范空间 $X(X\neq\{0\})$，在 X上的非零线性连续泛函是否存在？如果存在，是否也足够多？这个问题与本节讨论的延拓定理有关，汉恩—巴拿赫(Hahn-Banach)定理对这一问题给出了肯定的回答.

4.2.1 延拓定理及推论

定理 4.2.1(Hahn-Banach) 设 X是线性赋范空间，G是 X的线性子空间，f是 G上的任一线性有界泛函，则可以作出 X上线性有界泛函 F，满足：

(1) 当 $x\in G$时，$F(x)=f(x)$；

(2) $\|F\|_X=\|f\|_G$.

其中 $\|F\|_X$ 表示 F作为 X上的线性泛函的范数，$\|f\|_G$表示 G上线性泛函的范数.

证 这个定理的证明比较困难，需要较深的数学知识. 为了简单，这里只对可分的线性赋范空间证明定理.

如果 $G\neq X$，则有 $x_0\in X-G$. 考虑由 x_0 和 G张成的子空间 $G_1=\mathrm{span}(G, x_0)$，则 G_1 的每一元素 y都可以唯一地表示成

$$y=tx_0+x \qquad x\in G$$

首先作 f 到 G_1 上的延拓 F_1. 如果所求的泛函 F_1 存在，则应有

$$F_1(y) = tF_1(x_0) + F_1(x) \quad 或 \quad F_1(y) = tF_1(x_0) + f(x)$$

令 $F_1(x_0) = -c$, 则 $F_1(y) = f(x) - ct$.

欲使泛函延拓后范数不增加，必须选 c, 使不等式

$$|f(x) - ct| \leqslant \|f\| \|x + tx_0\| \tag{4.2-1}$$

与不等式(4.2-1)等价的不等式是

$$f(x) + \|f\| \|x + tx_0\| \geqslant ct \geqslant f(x) - \|f\| \|x + tx_0\|$$

若令 $u = x/t$, $u \in G$, 所求的 c 应满足

$$f(u) + \|f\| \|u + x_0\| \geqslant c \geqslant f(u) - \|f\| \|u + x_0\| \tag{4.2-2}$$

下面要证满足(4.2-2)式的 c 是存在的. $\forall u_1, u_2 \in G$, 有

$$\begin{aligned} f(u_1) - f(u_2) &= f(u_1 - u_2) \leqslant \|f\| \|u_1 - u_2\| \\ &= \|f\| \|u_1 + x_0 - (u_2 + x_0)\| \\ &\leqslant \|f\| \|u_1 + x_0\| + \|f\| \|u_2 + x_0\| \end{aligned}$$

由此可得

$$f(u_2) + \|f\| \|u_2 + x_0\| \geqslant f(u_1) - \|f\| \|u_1 + x_0\| \tag{4.2-3}$$

由确界存在公理及(4.2-3)式知

$$\beta = \inf_{u \in G}(f(u) + \|f\| \|u + x_0\|), \quad \alpha = \sup_{u \in G}(f(u) - \|f\| \|u + x_0\|)$$

都存在，且有 $\alpha \leqslant \beta$. 任取 c 满足 $\alpha \leqslant c \leqslant \beta$, 即 c 是满足(4.2-1)式的数. 这样，对于 $G_1 = \text{span}(G, x_0)$ 的元素 $y = tx_0 + x$, 定义了连续线性泛函

$$F_1(y) = f(x) - ct$$

且
$$\|F_1\| = \|f\|$$

由于 X 可分，故存在处处稠密的可列子集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$, 像构造 G_1 那样，作 G_n:

$$G_1 = \text{span}(G, x_0), \; G_2 = \text{span}(G_1, x_1), \cdots, G_{n+1} = \text{span}(G_n, x_n), \cdots$$

然后在这些子空间上逐步延拓泛函，即在 G_n 上构造泛函 F_n, 使它在 G_{n-1} 与 F_{n-1} 重合，且 $\|F_n\|_{G_n} = \|F_{n-1}\|_{G_{n-1}} = \cdots = \|f\|_G$, $\cdots$ 这样就在 X 的稠密子集上得到了线性连续泛函 F. 对于 X 的其它点，可按连续性补充定义：若 $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, 则令 $F(x) = \lim\limits_{n \to \infty} F(x_n)$, 由于

$$|F(x)| = \lim_{n \to \infty} |F(x_n)| \leqslant \lim_{n \to \infty} \|f\| \|x_n\| = \|f\| \|x\|$$

故有 $\|F\|_X \leqslant \|f\|_G$. 另一方面，显见 $\|F\|_X \geqslant \|f\|_G$, 所以 $\|F\|_X = \|f\|_G$. $\square$

将汉恩—巴拿赫定理看作“极小化”问题的存在性定理是最合适不过的. 给定线性赋范空间 X 的子空间 G 上的一个线性有界泛函 f, 不难将它延拓到整个空间 X 上. 然而，任意的延拓通常是无界的或者具有比 f 更大的范数. 因此，在这里就出现了是否具有最小范数的延拓问题. 汉恩—巴拿赫定理给了肯定的答案：即保证了最小范数延拓的存在性，又指出了这个最佳延拓的范数就是 f 的范数.

注 4.2.1 由定理 4.2.1 的证明过程易知泛函的延拓不是唯一的，原因在于 c 的选取不唯一.

推论 4.2.1(Hahn-Banach) 设 X 是一线性赋范空间，对任何 $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, 则必存在 X 上的线性连续泛函 f, 满足：

(1) $f(x_0)=\|x_0\|$;

(2) $\|f\|=1$.

证 设 $G=\{tx_0 \mid t\in \Lambda\}$，则 G 是由 x_0 张成的子空间，其中 $x_0\in X$，$x_0\neq 0$. 在 G 上定义泛函如下：

$$\varphi(x)=t\|x_0\| \qquad x=tx_0\in G$$

显然，$\varphi(x_0)=\|x_0\|$，$|\varphi(x)|=|t\|x_0\||=\|tx_0\|=\|x\|$，$\forall\, x=tx_0\in G$. 从而 $\|\varphi\|_G=1$.

根据定理 4.2.1，可以把 G 上的线性有界泛函 φ 延拓到 X 上得到 f，且有 $\|f\|_X=\|\varphi\|_G=1$. □

注 4.2.2 推论 4.2.1 可说明以下两点：

(1) 对于任何非零的线性赋范空间 X，X 上的非零线性连续泛函是足够多的.

(2) 如果对于 X 上的一切线性有界泛函 f，都有 $f(x)=0$，则有 $x=0$，因此，要判别 $x_0\in X$ 是否为零元，只要判别对 X 上的一切线性有界泛函 f，看 $f(x_0)$ 是否都等于零即可.

注 4.2.3 Hahn－Banach 定理的几何意义如下：

$\forall\, f\in X^*$，作集合

$$L_f^c=\{x\in X \mid f(x)=c\} \tag{4.2-4}$$

称 L_f^c 是 X 中的**超平面**.

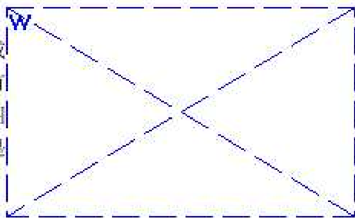


图 4－1

设 $\Omega\subset X$，如果对任何 $x\in\Omega$，有 $f(x)\leqslant c$（或 $f(x)\geqslant c$），则称 Ω 位于 L_f^c 的一侧；如果还有 $x_0\in\Omega\cap L_f^c$，则称超平面 L_f^c 在 x_0 处支撑着 Ω（如图 4－1 所示）. 推论 4.2.1 的几何意义是说：如果 Ω 是 X 中的球：

$$\Omega=\{x\in X \mid \|x\|\leqslant R\}$$

则在球面 $\partial\Omega=\{x\in X \mid \|x\|=R\}$ 上每一点处存在支撑球 Ω 的超平面 L_f^c.

事实上，当 $x_0\in\partial\Omega$ 时，$\|x_0\|=R$，$x_0\neq 0$，则存在 $f_0\in X^*$，使 $\|f_0\|=1$，$f(x_0)=\|x_0\|=R$，即 $x_0\in L_{f_0}^R=\{x\in X \mid f_0(x)=R\}$；当 $x\in\Omega$ 时，$f_0(x)\leqslant\|f_0\|\,\|x\|=\|x\|\leqslant R$，即 Ω 在 $L_{f_0}^R$ 的一侧，所以在 x_0 点 $L_{f_0}^R$ 支撑 Ω.

推论 4.2.2 设 X 是线性赋范空间，G 是 X 的子空间，$x_0\in X$，$d(x_0, G)=\inf\limits_{y\in G}\|x_0-y\|=d>0$，则必存在 X 上的有界线性泛函 f，满足：

(1) $\forall\, x\in G$，$f(x)=0$；

(2) $f(x_0)=d$；

(3) $\|f\|=1$.

证 设 $G_1=\mathrm{span}(G, x_0)$，由于 $x_0\in G$，故 G_1 中的元素 y 可唯一地表示为

$$y=x+tx_0 \qquad x\in G$$

在 G_1 上作泛函 φ：

$$\varphi(y)=\varphi(x+tx_0)=td$$

容易验证 φ 是 G_1 上的线性泛函，且 $\varphi(x_0)=d$，当 $x\in G$ 时，$\varphi(x)=0$.

此外，还可以证明 φ是有界的且 $\|\varphi\|_{G_1}=1$.

$$\forall\ y=x+tx_0\in G_1\qquad x\in G,\ t\in\mathbf{R}^1$$

$$\|y\|=\|x+tx_0\|=|t|\ \left\|x_0-\left(-\frac{1}{t}x\right)\right\|\geqslant|t|\ d$$

$$|\varphi(y)|=|\varphi(x+tx_0)|=|t|\ d\leqslant\|y\|$$

则有

$$\|\varphi\|_{G_1}\leqslant 1$$

另一方面，由 d的定义，可取一列 $x_n\in G$，使

$$d=\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|$$

于是

$$|\varphi(x_n-x_0)|=|-\varphi(x_0)|=d\leqslant\|\varphi\|_{G_1}\|x_n-x_0\|\tag{4.2-5}$$

在(4.2-5)式中令 $n\to\infty$，有 $d\leqslant\|\varphi\|_{G_1}d$，从而 $\|\varphi\|_{G_1}\geqslant1$，故 $\|\varphi\|_{G_1}=1$. 根据定理4.2.1，把泛函 φ延拓到全空间 X得 f，则 f满足：

(1) $\forall\ x\in G$，$f(x)=\varphi(x)=0$；

(2) $f(x_0)=\varphi(x_0)=d$；

(3) $\|f\|_X=\|\varphi\|_{G_1}=1$. □

注 4.2.4 由推论 4.2.2 可以导出两个结果：

(1) $x_0\in\bar{G}\Longleftrightarrow$对 X上的任一满足：$x\in G$，$f(x)=0$ 的线性有界泛函，有 $f(x_0)=0$.

$\Rightarrow$ 显然.

$\Leftarrow$ 由推论 4.2.2 立即推出. 事实上，若 $x_0\in\bar{G}$，则 $d(x_0,\bar{G})=d>0$，由推论 4.2.2，存在 $f\in X^*$，满足$\forall\ x\in G$，$f(x)=0$，$f(x_0)=d>0$，且 $\|f\|_X=1$，这与假设相矛盾.

(2) 设 A是 X的子集，$x_0\in X$，x_0 可以用 A中元素的线性组合以任意的精度逼近 $x_0\Longleftrightarrow$对 X上任意满足条件：$\forall\ x\in A$，$f(x)=0$ 的线性有界泛函，必有 $f(x_0)=0$.

事实上，若令 $G=\operatorname{span}A$，则 x_0 可用形如 $\sum_{k=1}^{n}c_kx_k(x_k\in A)$ 的元素任意逼近的充要条件是 $x_0\in\bar{G}$. 由结果(1)可知结果(2)成立.

4.2.2 延拓定理的几点应用

1. Riesz 定理

作为 **Hahn-Banach** 定理的应用，我们先对$(\mathbf{C}[0,1])^*$中的元素来证明 **Riesz** 定理.

定理 4.2.2(Riesz 定理) 如果 $f\in(C[0,1])^*$，则存在唯一的 $g\in V_0[0,1]$，使$\forall\ x\in C[0,1]$，有

$$f(x)=\int_0^1x(t)\ \mathrm{d}g(t)\tag{4.2-6}$$

且有

$$\|f\|=V_0^1(g)\tag{4.2-7}$$

证 (对于初学者，定理4.2.2 的证明可以跳过.)记 $M[0,1]$是$[0,1]$上的全体有界函数构成的线性赋范空间，其中 $x\in M[0,1]$，$\|x\|=\sup\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$为 x的范数，在 $\|x\|$下，$M[0,1]$构成 Banach 空间. $C[0,1]$是 $M[0,1]$的线性子空间. $\forall\ f\in(C[0,1])^*$，由 Hahn-Banach定理，存在到 $M[0,1]$的延拓 F，使得在 $C[0,1]$上有 $F(x)=f(x)$，且

$\| F\| = \| f\|$.

设 χ_t 是$[0, t](0\leqslant t\leqslant 1)$上的特征函数，即

$$\chi_t(y) = \begin{cases} 1 & 0\leqslant y\leqslant t \\ 0 & t< y\leqslant 1 \end{cases}$$

则 $\forall\ t\in[0, 1]$，$\chi_t\in M[0, 1]$，令

$$F(\chi_t) = g(t)$$

这个函数 g 就是(4.2-6)式中的函数 $g(t)$. 记 $\varepsilon_i=\operatorname{sgn}[g(t_i)-g(t_{i-1})]$，则

$$|g(t_i)-g(t_{i-1})| = [g(t_i)-g(t_{i-1})]\varepsilon_i$$

故有

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i)-g(t_{i-1})| \leqslant \| F\| \cdot \left|\sum_{i=1}^{n}[\chi_{t_i}-\chi_{t_{i-1}}]\varepsilon_i\right|$$

如果 $y\in[0, 1]$，则对某个 j，$y\in(t_{j-1}, t_j]$，因此

$$\sum_{i=1}^{n}[\chi_{t_i}(y)-\chi_{t_{i-1}}(y)]\varepsilon_i = \varepsilon_j$$

从而有

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i)-g(t_{i-1})| \leqslant \| F\| \tag{4.2-8}$$

因此 $g\in V[0, 1]$. 作有界函数列 $z_n(u)$，

$$z_n(u) = \begin{cases} x(0) & u=0 \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{n} x\left(\frac{r}{n}\right)(\chi_{r/n}-\chi_{(r-1)/n}) & u\in(0, 1] \end{cases}$$

显见 $z_n(u)$是由 $x(u)$构造的一个阶梯函数. 由 $x(u)$连续，因而 $x(u)$在$[0, 1]$上一致连续，再由于

$$|x(u)-z_n(u)| = \begin{cases} 0 & u=0 \\ \left|x(u)-x\left(\frac{r}{n}\right)\right| & u\in\left(\frac{r-1}{n}, \frac{r}{n}\right];\ r=1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

可知 $\| z_n-x\| \to 0\ (n\to\infty)$. 从而 $F(z_n)\to F(x)=f(x)$，所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} x\left(\frac{r}{n}\right)[F(\chi_{\frac{r}{n}})-F(\chi_{\frac{r-1}{n}})] \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} x\left(\frac{r}{n}\right)\left[g\left(\frac{r}{n}\right)-g\left(\frac{r-1}{n}\right)\right] \\ &= \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}g(t) \end{aligned} \tag{4.2-9}$$

由(4.2-9)式可知

$$|f(x)| \leqslant \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \cdot V_0^1(g) = V_0^1(g)\,\| x\|$$

所以 $\| f\| \leqslant V_0^1(g)\xlongequal{\text{def}}\| g\|$，结合(4.2-8)式有 $\| f\| = V_0^1(g)$，即(4.2-7)式成立.

这里应注意，由于泛函延拓不唯一，故 $g\in V_0[0, 1]$也不唯一. 若我们把 g 限制在 $V_0[0, 1]$上选取，则这样的 g 是唯一的. 这里不再赘述. □

2. 二次共轭空间

Hahn-Banach 定理的另一应用是有关线性赋范空间的**二次共轭空间**. 二次共轭空间

用 $X^{**}=(X^*)^*$ 来定义. 如果 X是数域 Λ 上的线性赋范空间，关于共轭空间 X^* 及 X^{**}，有以下的结果：

(1) 如果 Λ是实数或复数域，则 X^* 是 Banach 空间；

(2) 当 $X\neq\{0\}$时，由 Hahn－Banach 定理知 $X^*\neq\{0\}$，故有 $X^{**}=(X^*)^*\neq\{0\}$，X^{**} 也是 Banach 空间；

(3) 当 $X=L^p[a, b]$ ($p>1$) 时，则有 $(L^p[a, b])^*=L^q[a, b]\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$，$(L^p[a, b])^{**}=(L^q[a, b])^*=L^p[a, b]$，即称 **$L^p[a, b]$是自反的.**

特别地，$(L^2[a, b])^*=L^2[a, b]$，即称 **$L^2[a, b]$是自共轭的.**

一般地，$X^*\neq X$, $X^{**}\neq X^*$. 事实上，只要取 X是不完备的线性赋范空间，则必有 $X^*\neq X$(因 X^* 是 Banach 空间). 但它们之间是有联系的，X与 X^{**} 之间有以下的"嵌入"关系.

定理 4.2.3 设 X是线性赋范空间，则 X与二次共轭空间 X^{**} 的某个子空间 $\widetilde{X}$线性等距同构.

证 这里用 x表示 X的元素，x^* 表示 X^* 的元素. 对于 X的每一元素 x，用

$$\widetilde{x}(x^*)=x^*(x) \tag{4.2-10}$$

来定义 X^* 上的泛函 $\widetilde{x}$，则 $\widetilde{x}$是线性有界泛函. 事实上，$\forall\ x_1^*, x_2^*\in X^*$，$\alpha, \beta\in\Lambda$，有

$$\widetilde{x}(\alpha x_1^*+\beta x_2^*)=(\alpha x_1^*+\beta x_2^*)x=\alpha x_1^*(x)+\beta x_2^*(x)=\alpha\widetilde{x}(x_1^*)+\beta\widetilde{x}(x_2^*)$$

$$|\widetilde{x}(x^*)|=|x^*(x)|\leqslant\|x^*\|\|x\|$$

于是 $\|\widetilde{x}\|\leqslant\|x\|$，即 $\widetilde{x}\in X^{**}$. 再由范数定义，有

$$\|\widetilde{x}\|=\sup_{\|x^*\|=1}|\widetilde{x}(x^*)|=\sup_{\|x^*\|=1}|x^*(x)|$$

当 $x\neq 0$ 时，由 Hahn－Banach 定理，$\exists\ x_0^*\in X^*$，使 $x_0^*(x)=\|x\|$，$\|x_0^*\|=1$，从而 $\|\widetilde{x}\|=\sup\limits_{\|x^*\|=1}|x^*(x)|\geqslant|x_0^*(x)|=\|x\|$. 对于 $x=0$，这个不等式显然成立，所以

$$\|\widetilde{x}\|=\|x\| \tag{4.2-11}$$

作 $X\to X^{**}$ 的映射 T：$\forall\ x\in X$，$T(x)=\widetilde{x}$，于是 T是 $X\to X^{**}$ 的线性映射. 实际上，$\forall\ x^*\in X^*$，$x, y\in X$，$\alpha, \beta\in\Lambda$，有

$$\begin{aligned}T(\alpha x+\beta y)x^*&=(\alpha x+\beta y)x^*=x^*(\alpha x+\beta y)\\&=\alpha x^*(x)+\beta x^*(y)=\alpha\widetilde{x}(x^*)+\beta\widetilde{y}(x^*)\\&=\alpha T(x)x^*+\beta T(y)x^*=(\alpha T(x)+\beta T(y))x^*\end{aligned}$$

所以 T是 $X\to X^{**}$ 线性映射. 再由(4.2-11)式知 $\|Tx\|=\|x\|$，即 T是保范的. 再令 $\widetilde{X}=\{\widetilde{x}|\widetilde{x}=T(x), x\in X\}$.

再由当 $x\neq y$时

$$\|T(x)-T(y)\|=\|T(x-y)\|=\|x-y\|\neq 0$$

可知 T：$X\to\widetilde{X}$是一一映射，即 T是 X与 $\widetilde{X}$的线性等距同构映射，所以 X与 $\widetilde{X}$ 是线性等距同构的. □

根据定理 4.2.3 可知，在等距同构的意义之下，可以把 X看作 X^{**} 的子空间. 把算子 T: $X\to X^{**}$ 称为嵌入算子. X作为 X^{**} 的子空间可认为是通过嵌入算子把 X"镶嵌"到 X^{**} 上的.

最后给出自反及自共轭空间的概念.

定义 4.2.1 设 X 是线性赋范空间，如果 $X=X^*$，称 X 是**自共轭**的；如果 $X=X^{**}$，称 X 是**自反**的.

由定义 4.2.1 知，$\mathbf{R}^n$ 是自反的、自共轭的 Banach 空间；l^2，$L^2[a,b]$ 是自反的，也是自共轭的；希尔伯特空间是自反的，也是自共轭的；l^p，$L^p[a,b](p>1,\ p\neq 2)$ 是自反的，但不是自共轭的.

3. 抽象解析函数

最后应用 Hahn-Banach 定理来推广刘维尔(Liouville)定理. Liouville 定理断言：有界整函数必是常数. 这个定理在复变函数论中有重要地位.

设 C 是复平面，$D\subset C$ 是复平面上的一个区域，X 是复的 Banach 空间，映射 x: $D\to X$，$\forall z\in D$，x: $z\to x(z)\in X$，称 x 是 $D\to X$ 的抽象函数. 如果对 $\forall z\in D$，$z+h\in D$，

$$x'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{x(z+h)-x(z)}{h} \tag{4.2-12}$$

存在，则称 x 是 D 上的抽象解析函数，其中极限(4.2-12)式是在 X 中取的.

如果 $f\in X^*$ 且 x 在 D 上解析，则由 $(fx)(z)=f(x(z))$ 定义的复合函数 fx 在 D 上解析. 事实上，

$$\begin{aligned}(fx)'(z)&=\lim_{h\to 0}\frac{(fx)(z+h)-(fx)(z)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f[x(z+h)-x(z)]}{h}\\&=\lim_{h\to 0}f\left[\frac{x(z+h)-x(z)}{h}\right]\\&=f\left[\lim_{h\to 0}\frac{x(z+h)-x(z)}{h}\right]\\&=f(x'(z))\end{aligned}$$

存在，所以 fx 是解析的.

按照通常的说法，如果 x 在 C 上解析，称 x 为整函数. 如对所有 $z\in C$，有 $|x(z)|\leqslant M$，称 x 为有界的.

定理 4.2.4(推广的 Liouville 定理) 设 X 是复的 Banach 空间，x: $C\to X$ 是有界整函数，则 $\forall z\in C$，$x(z)$ 为常数.

证 由于 x: $C\to X$ 是有界的，则 $\forall z\in C$，有

$$|f(x(z))|\leqslant\|f\|\,\|x(z)\|\leqslant\|f\|M$$

所以 fx 是有界的整函数. 由 Liouville 定理知 $\exists z_0\in C$，$\forall z\in C$，有 $f(x(z))=f(x(z_0))$，即 $f(x(z)-x(z_0))=0$. 由 Hahn-Bananch 定理知 $x(z)-x(z_0)=0$，即 $x(z)=x(z_0)$.

4.3 线性有界算子

4.3.1 定义及例子

定义 4.3.1(算子) 设 X_1，X_2 是同一数域 Λ 上的两个线性赋范空间，$D\subset X_1$ 为某一

子集．如果存在一种对应法则 T，使对任何 $x\in D$，有唯一的 $y=Tx\in X_2$ 与之对应，称 T 是 X_1 中 D 到 X_2 的算子(或称为映射)．D 称为 T 的**定义域**，记为 $D(T)$，Tx 称为 x 的**象**，象的全体 $\{Tx|x\in D\}$ 称为 T 的**值域**(或象集)，记为 $R(T)$(或 TD)．

注 4.3.1 若 $X_1=X_2=\mathbf{R}^1$，则 T 为**函数**；$X_1=\mathbf{R}^n$，$X_2=\mathbf{R}^1$，则 T 为 **n 元函数**；当 X_1，X_2 为线性赋范空间时，T 为**算子**；当 X_1 为线性赋范空间，$X_2=\mathbf{R}^1$ 时，T 为**泛函**；当 X_1 为数空间，X_2 为线性赋范空间时，T 称为**抽象函数**．

定义 4.3.2(算子连续) 设 $T:D(D\subset X_1)\to X_2$，$x_0\in D$，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时，有 $\|Tx-Tx_0\|<\varepsilon$，则称 T 在 x_0 点连续；如果 T 在 D 上每一点都连续，则称 T 在 D 上连续．

由定义 4.3.2 易知：T 在 x_0 点连续 $\Longleftrightarrow\forall x_n\in D$，当 $x_n\to x_0$ 时，有 $Tx_n\to Tx_0$．

定义 4.3.3(线性算子) 设 X_1，X_2 是同一数域 Λ 上的两个线性赋范空间，D 是 X_1 的线性子空间，$T:D\to X_2$．如果对于任何 x_1，$x_2\in D$，α，$\beta\in\Lambda$，有

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2 \qquad (4.3-1)$$

则称 T 为 D 到 X_2 的**线性算子**．D 为 T 的定义域，记为 $D(T)$；$R(T)=\{y|y=Tx,x\in D(T)\}$ 是 T 的值域．

与线性泛函类似，对于线性算子也有以下定理．

定理 4.3.1 设 $T:D(\subset X_1)\to X_2$ 是线性算子，则 T 在 D 上连续 $\Longleftrightarrow T$ 在某点 $x_0\in D$ 连续．

该定理的证明几乎与定理 4.1.1 的证明相同，略去证明． □

定义 4.3.4(有界) 设 $T:D(\subset X_1)\to X_2$ 是线性算子，T 在 D 上**有界**是指：$\exists M>0$，使对任何 $x\in D$，有

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\| \qquad (4.3-2)$$

注 4.3.2 线性算子 T 在 D 是有界的等价定义是：T 把 D 中的任何有界集映成 X_2 中的有界集．证明如下：设 S 是 D 的有界集(即 $\exists L>0$，$\forall x\in S$，$\|x\|\leqslant L$)，由(4.3-2)式，$\forall x\in S$，$|Tx|\leqslant M\|x\|\leqslant ML$，即 TS 为 X_2 中的有界集．反之，$\forall x\in D$(设 $x\neq0$)，则 $\left\{\frac{x}{\|x\|}\,\middle|\,x\in D,x\neq0\right\}$ 是 D 中的有界集，由于 $\left\{T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\}$ 是 X_2 中的有界集，故 $\exists M>0$，使 $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\leqslant M$，即有 $\|Tx\|\leqslant M\|x\|$，即 T 在 D 上有界．

例 4.3.1 设 X 是线性赋范空间，a 是某一常数，$\forall x\in X$，令

$$Tx=ax$$

则 T 是 $X\to X$ 的线性有界算子．

证 事实上，$\forall x,y\in X$，$\alpha,\beta\in\Lambda$，有

$$\begin{aligned}T(\alpha x+\beta y)&=a(\alpha x+\beta y)=\alpha(ax)+\beta(ay)\\&=\alpha Tx+\beta Ty\end{aligned}$$

即 T 为线性算子，又因

$$\|Tx\|=\|ax\|=|a|\,\|x\|$$

故 T 是线性有界算子．

例 4.3.2(积分算子) $T:C[a,b]\to C[a,b]$，定义为：$\forall x\in C[a,b]$，

$$Tx = \int_a^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \forall\, t\in[a,\ b]$$

则 T 是线性有界算子.

证 事实上，x_1，$x_2\in C[a,\ b]$，α、β 为实数，有

$$T(\alpha x_1+\beta x_2) = \int_a^t (\alpha x_1(\tau)+\beta x_2(\tau)]\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \alpha\int_a^t x_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\beta\int_a^t x_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \alpha Tx_1+\beta Tx_2$$

$$\|Tx\| = \max_{t\in[a,\ b]}\left|\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \max_{t\in[a,\ b]}\int_a^t |x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant \|x\|\int_a^b \mathrm{d}\tau = (b-a)\|x\|$$

可见 T 是线性有界算子.

例 4.3.3(矩阵) $m\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ 是线性有界算子.

证 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m)\in\mathbf{R}^m$. 定义 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 的算子 $\mathbf{A}$:

$$\boldsymbol{y}= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

则 A 是线性有界算子.

易证 $\mathbf{A}$ 是线性算子，下证 $\mathbf{A}$ 是有界的. 取 $\mathbf{R}^n$ 中的范数为 $\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{y}= A\boldsymbol{x}$ 用分量表示为 $y_i = \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，应用 Cauchy 不等式有

$$\|\boldsymbol{Ax}\|^2 = \|\boldsymbol{y}\|^2 = \sum_{i=1}^m y_i^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)^2$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^m \left[\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)\|\boldsymbol{x}\|^2$$

令 $M^2 = \sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2$，可知 $\mathbf{A}$ 是线性有界算子.

例 4.3.4(积分算子) 设 $\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^p\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t<+\infty$，$Tx(s) = \lambda\int_a^b K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t$，证明 T 是 $L^q[a,\ b]\to L^p[a,\ b]$ 的线性有界算子$\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,\ p>1,\ q>1\right)$.

证 (1) 先证：T：$L^q[a,\ b]\to L^p[a,\ b]$.

$\forall\, x\in L^q[a,\ b]$，由 Hölder 不等式，

$$|Tx(s)|^p = |\lambda|^p\left|\int_a^b K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t\right|^p$$

$$\leqslant |\lambda|^p\left|\left(\int_a^b |K(s,t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |x(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\right|^p$$

$$= |\lambda|^p\int_a^b |K(s,t)|^p\,\mathrm{d}t\cdot\left(\int_a^b |x(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\left(\int_a^b |Tx(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant |\lambda|\left(\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^p\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |x(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.3-3}$$

由题设可知$\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^p \mathrm{d}t\mathrm{d}s<+\infty$，即 $Tx(s)\in L^p[a,b]$.

(2) T显然是线性算子.

(3) 证 T是有界算子. 取 $M=|\lambda|\left(\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^p \mathrm{d}t\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}$，则由(4.3-3)式可知，$\forall\ x(t)\in L^q[a,b]$，有

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$$

即 T是线性有界算子.

例 4.3.5(无界算子之例) 用 $C^1[0,1]$表示$[0,1]$上连续可微函数的全体，则 $C^1[0,1]$是 $C[0,1]$的线性子空间. 定义 T: $C^1[a,b]\to C[0,1]$如下：$\forall\ x\in C^1[0,1]$，

$$Tx=x'(t)$$

则 T是线性无界算子.

证 事实上，取 $x_n(t)=t^n$，则 $\|x_n\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|t^n|=1$，但 $\|Tx_n\|=\|nt^{n-1}\|=n$，故 T无界.

与线性泛函类似，关于线性算子，其连续性与有界性等价，写成以下定理.

定理 4.3.2(有界与连续) 设 X_1，X_2 是同一数域 Λ上的线性赋范空间，$D\subset X_1$ 是线性子空间，T: $D\to X_2$ 的线性算子，则 T在 D上连续$\Longleftrightarrow$ T在 D上有界.

证明同定理 4.1.2. □

4.3.2 线性有界算子空间

我们知道，$\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的线性算子是很多的，每一个 $m\times n$矩阵都可以定义一个线性算子. 这就是说，$\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的线性算子的“个数”不少于 $m\times n$矩阵的“个数”. 前一段，我们对单个线性算子进行了讨论，下面研究线性算子全体构成的空间.

定义 4.3.5 设 X_1，X_2 是同一数域 Λ上的线性赋范空间.

(1)(线性算子空间)把 $X_1\to X_2$ 的一切线性算子构成的集合称为 $X_1\to X_2$ 的线性算子空间，记为$(X_1\to X_2)$，即

$$(X_1\to X_2)=\{T \mid T\text{是 } X_1\to X_2 \text{ 的线性算子}\}$$

(2)(线性有界算子空间)把 $X_1\to X_2$ 的一切线性有界算子构成的集合称为 $X_1\to X_2$ 的线性有界算子空间，记为 $B(X_1\to X_2)$，即

$$B(X_1\to X_2)=\{T \mid T\text{是 } X_1\to X_2 \text{ 的线性有界算子}\}$$

显然，$B(X_1\to X_2)\subset(X_1\to X_2)$，$\theta\in B(X_1\to X_2)$，故 $B(X_1\to X_2)\neq\varnothing$. 在$(X_1\to X_2)$中定义加法、数乘如下：$\forall\ T_1,\ T_2\in(X_1\to X_2)$，$\alpha\in\Lambda$.

加法：T_1+T_2，$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x$，$\forall\ x\in X_1$；

数乘：αT，$(\alpha T)x=\alpha Tx$，$\forall\ x\in X_1$.

容易验证，对上述算子的加法、数乘，$(X_1\to X_2)$构成数域 Λ上的线性空间，$B(X_1\to X_2)$是$(X_1\to X_2)$的线性子空间.

如果可以在算子空间中定义范数，则算子空间就成为线性赋范空间.

$\forall\ T\in B(X_1\to X_2)$，则$\exists\ M>0$，$\forall\ x\in X_1$，有 $\|Tx\|\leqslant M\|x\|$，当 $x\neq0$ 时，有 $\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant M$，即 M是数集$\left\{\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}\,\middle|\, x\in X_1,\ x\neq0\right\}$的一个上界，由确界存在公理，

$\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$存在且有限，记 $\|T\|=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$.

反过来，如果$\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}=\|T\|$有限，则 $\|Tx\|\leqslant\|T\|\ \|x\|$，即 T是有界线性算子，由此可得

$$T有界 \iff \|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}存在（<+\infty）$$

这样，我们可以在 $B(X_1\to X_2)$中，对 T定义范数.

定义 4.3.6(算子范数) 设 $T\in B(X_1\to X_2)$，定义 T的范数为

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{4.3-4}$$

由(4.3-4)式立即可以得到：$\forall\ T\in B(X_1\to X_2)$，$\forall\ x\in X_1$，有

$$\|Tx\| \leqslant \|T\|\ \|x\| \tag{4.3-5}$$

与有界线性泛函的情况相同，可以验证：由(4.3-4)式定义的算子范数满足范数的三条公理，因此 $B(X_1\to X_2)$在由(4.3-4)式定义的范数 $\|T\|$下构成线性赋范空间，称它为 X_1 到 X_2 的有界线性算子空间.

在空间 $B(X_1\to X_2)$中，算子列也有依范数收敛(或称一致收敛)的概念：T_n，$T\in B(X_1\to X_2)$，若 $\|T_n-T\|\to 0\ (n\to\infty)$，称算子列$\{T_n\}$依范数收敛于 T，记为

$$T_n\to T \qquad n\to\infty$$

还可以验证：$T\in B(X_1\to X_2)$，有

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| \tag{4.3-6}$$

我们利用等式(4.3-4)、(4.3-6)式来阐述 $\|T\|$的几何意义. 由于 $\|Tx\|/\|x\|$是向量 Tx与 x的长度之比，则(4.3-4)式说明 $\|T\|$是映射 T的最大伸缩系数. 而(4.3-6)式表示 X_1 中的单位球 $\bar{B}(0,1)$的象 $T\bar{B}(0,1)$包含于 X_2 的某个以 0 为中心的最小闭球，则这个闭球的半径恰是 $\|T\|$.

下面，我们举出几个例子说明算子范数的求法：要证明 T的范数等于 M，一方面要证明：$\forall\ x\in X_1$，$\|x\|=1$，有 $\|Tx\|\leqslant M$，另一方面，又要设法取一特殊的 x_0，$\|x_0\|=1$，使 $\|Tx_0\|=M$，或者设法取一列 x_n，$\|x_n\|=1$，使 $\|Tx_n\|\to M$.

例 4.3.6 设线性算子 T：$L[a,b]\to C[a,b]$，定义为

$$(Tx)(t) = \int_a^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{4.3-7}$$

则有 $\|T\|=1$.

证 $\forall\ x\in L[a,b]$，使 $\|x\| = \int_a^b |x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau=1$，由于

$$\|Tx\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^t |x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = \int_a^b |x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = 1$$

即 $\|T\|\leqslant 1$. 另一方面，取 $x_0(t)=\dfrac{1}{b-a}\in L[a,b]$，且 $\|x_0\|=1$，因此

$$\|T\| \geqslant \|Tx_0\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t x_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_0^t \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}\tau = 1$$

所以 $\|T\|=1$.

例 4.3.7 把由(4.3-7)式定义的算子 T 看作 $L[a,b]\to L[a,b]$ 的映射时，有 $\|T\|=b-a$.

证 $\forall x\in L[a,b]$，$\|x\|=\int_a^b|x(\tau)|\mathrm{d}\tau=1$. 由于

$$\|Tx\|=\int_a^b\left|\int_a^t x(\tau)\mathrm{d}\tau\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b\int_a^t|x(\tau)|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\int_a^b\mathrm{d}t\int_a^b|x(\tau)|\mathrm{d}\tau=\int_a^b\mathrm{d}t=b-a$$

故 $\|T\|\leqslant b-a$. 另一方面，对满足 $a+\frac{1}{n}<b$ 的自然数 n，作函数

$$x_n(t)=\begin{cases}n & t\in\left[a,\ a+\frac{1}{n}\right]\\ 0 & t\in\left(a+\frac{1}{n},\ b\right]\end{cases}$$

显然 $\|x_n\|=1$，而且

$$\|Tx_n\|=\int_a^b\left|\int_a^t x_n(\tau)\mathrm{d}\tau\right|\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^{a+\frac{1}{n}}n(t-a)\mathrm{d}t+\int_{a+\frac{1}{n}}^b 1\cdot\mathrm{d}t$$
$$=b-a-\frac{1}{2n}$$

所以 $\|T\|\geqslant\sup\limits_n\|Tx_n\|=b-a$，从而 $\|T\|=b-a$.

注 4.3.3 由例 4.3.6、例 4.3.7 可见，虽然给出的算子形式完全相同，但由于把它看作不同空间的映射，它们的算子范数也不相同.

下面求算子范数的例子虽然比较复杂，但该例的方法具有较高技巧.

例 4.3.8(线性积分算子的范数) 设 $K(s,t)$ 在矩形 $a\leqslant s,\ t\leqslant b$ 上连续，则

$$Tx=\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t \tag{4.3-8}$$

定义了 $C[a,b]\to C[a,b]$ 的线性有界算子(称 T 为具有连续积分核的线性积分算子)，并且有

$$\|T\|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b|K(s,t)|\mathrm{d}t \tag{4.3-9}$$

证 显见 T 是线性算子. 下证(4.3-9)式.

一方面，$\forall x\in C[a,b]$，有

$$\|Tx\|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b|K(s,t)x(t)|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\cdot\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b|K(s,t)|\mathrm{d}t$$

$$= \max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|\,\mathrm{d}t\cdot\|x\|$$

所以

$$\|T\|\leqslant \max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|\,\mathrm{d}t$$

由于 $\int_a^b K(s,t)\,\mathrm{d}t$ 是 s 的连续函数，故 $\exists\, s_0\in[a,b]$，使

$$\int_a^b |K(s_0,t)|\,\mathrm{d}t=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|\,\mathrm{d}t$$

从而证明了

$$\|T\|\leqslant\int_a^b |K(s_0,t)|\,\mathrm{d}t$$

另一方面，要证：$\forall\,\varepsilon>0$，$\|T\|\geqslant\int_a^b |K(s_0,t)|\,\mathrm{d}t-\varepsilon$，为此，令 $x_0(t)=\mathrm{sgn}K(s_0,t)$（$x_0$ 是可测函数），则 $|K(s_0,t)|=K(s_0,t)\cdot x_0(t)$. 作 $x_0^*(t)$，要求 $x_0^*\in C[a,b]$，且 $\|x_0^*\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_0^*(t)|=1$，记

$$E=\{t\mid x_0(t)\neq x_0^*(t)\qquad t\in[a,b]\}$$

使得

$$m(E)=m(\{t\mid x_0(t)\neq x_0^*(t)\qquad t\in[a,b]\})<\frac{\varepsilon}{2M}$$

这里 $M=\max_{a\leqslant s,t\leqslant b}|K(s,t)|$（由鲁金定理，这样的 x_0^* 可以找到）. 于是有

$$\begin{aligned}
\|T\|&=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\geqslant\|Tx_0^*\|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b K(s,t)x_0^*(t)\,\mathrm{d}t\right|\\
&=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b K(s,t)[x_0(t)+(x_0^*(t)-x_0(t))]\,\mathrm{d}t\right|\\
&\geqslant\left|\int_a^b K(s_0,t)x_0(t)\,\mathrm{d}t\right|-\left|\int_a^b K(s_0,t)[x_0^*(t)-x_0(t)]\,\mathrm{d}t\right|\\
&\geqslant\int_a^b |K(s_0,t)|\,\mathrm{d}t-\int_a^b |K(s_0,t)||x_0^*(t)-x_0(t)|\,\mathrm{d}t\\
&\geqslant\int_a^b |K(s_0,t)|\,\mathrm{d}t-M\int_a^b |x_0^*(t)-x_0(t)|\,\mathrm{d}t\\
&\geqslant\int_a^b |K(s_0,t)|\,\mathrm{d}t-2M\int_E \mathrm{d}t\\
&=\int_a^b |K(s_0,t)|\,\mathrm{d}t-2Mm(E)\\
&>\int_a^b |K(s_0,t)|\,\mathrm{d}t-\varepsilon
\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 任意，则 $\|T\|\geqslant\int_a^b |K(s_0,t)|\,\mathrm{d}t=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|\,\mathrm{d}t$，由此可知(4.3-9)式成立.

注 4.3.4 对于 $T\in B(X_1\to X_2)$，T 的范数 $\|T\|$ 实际上是实泛函 $f(x)=\|Tx\|$ 在单位闭球 $\bar{B}(0,1)\subset X_1$ 上的上确界. 在某些特殊情况下（例如 X_1 是有限维空间），上确界就是最大值. 要注意到这个实泛函 $f(x)=\|Tx\|$ 不是线性的，因此要精确地求出线性有界

算子的范数，并非易事. 如果问题需要求出算子范数，通常依如下步骤进行.

首先，$\forall x \in X_1$，对 $\|Tx\|$ 作出尽可能准确的估计：$\|Tx\| \leqslant M\|x\|$，由此推测 $\|T\| = M$.

其次，设法证明 $\|T\| = M$. 其方法有：

(1) 选取适当的 $x_0 \in X_1$，$\|x_0\| = 1$，使 $\|Tx_0\| = M$，则由 $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\| \geqslant \|Tx_0\| = M$，可知 $\|T\| = M$(如例 4.3.6).

(2) $\forall \alpha < M$，(通常取 $\alpha = M - \varepsilon$，ε 为任给正数)，选取 $x_\alpha \in X_1$，$\|x_\alpha\| = 1$，使 $\|Tx_\alpha\| > \alpha$，由 α 的任意性可知 $\|T\| \geqslant M$，即 $\|T\| = M$(如例 4.3.8).

(3) 选取 $x_\nu \in X_1$，$\|x_\nu\| = 1$，$\lim\limits_{\nu\to\infty}\|Tx_\nu\| \geqslant M$(如例 4.1.5、例 4.3.7).

$B(X_1 \to X_2)$作为线性赋范空间，还有如下的性质.

定理 4.3.3(完备性) 设 X_1 是线性赋范空间，X_2 是 Banach 空间，则 $B(X_1 \to X_2)$是 Banach 空间.

证 设$\{T_\nu\}$是 $B(X_1 \to X_2)$中的基本列，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $m, n > N$ 时，有 $\|T_m - T_n\| < \varepsilon$. 因此，$\forall x \in X_1$，有

$$\|T_m x - T_n x\| \leqslant \|T_m - T_n\|\,\|x\| < \varepsilon\|x\| \qquad (4.3-10)$$

即$\{T_\nu x\}$是 X_2 中的基本列. 由于 X_2 完备，故$\{T_\nu x\}$在 X_2 中收敛. 设$\lim\limits_{\nu\to\infty} T_\nu x = y \in X_2$，这样由 x 确定唯一的 y，于是可定义算子 T：$X_1 \to X_2$，$Tx = y$，

$$Tx = \lim_{\nu\to\infty} T_\nu x \qquad \forall x \in X_1$$

由于 T_ν 线性，故 $\forall x_1, x_2 \in X_1$，$\alpha, \beta \in \Lambda$，

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \lim_{\nu\to\infty} T_\nu(\alpha x_1 + \beta x_2) = \lim_{\nu\to\infty}(\alpha T_\nu x_1 + \beta T_\nu x_2) = \alpha\lim_{\nu\to\infty} T_\nu x_1 + \beta\lim_{\nu\to\infty} T_\nu x_2 \\ &= \alpha T x_1 + \beta T x_2 \end{aligned}$$

这说明 T 是线性算子，在(4.3-10)式中令 $m \to \infty$，应用范数的连续性可得

$$\|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon\|x\| \qquad n > N,\ x \in X_1 \qquad (4.3-11)$$

由此可知，当 $n > N$ 时，$(T_n - T) \in B(X_1 \to X_2)$，再由 $T_n \in B(X_1 \to X_2)$，可知 $T = T_n - (T_n - T) \in B(X_1 \to X_2)$. 由(4.3-11)式可得

$$\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon \qquad n > N$$

即 T_n 以范数收敛于 $T \in B(X_1 \to X_2)$，所以 $B(X_1 \to X_2)$是完备的，即为 Banach 空间. □

4.3.3 算子乘法及逆算子

已经证明：$(X_1 \to X_2)$在算子加法及数乘意义下构成线性空间，而 $B(X_1 \to X_2)$在引进范数(4.3-4)式时构成线性赋范空间，并且当 X_2 完备时，$B(X_1 \to X_2)$还是 Banach 空间. 下面引进算子乘法的概念.

定义 4.3.7(算子乘积) 设 X 是一线性赋范空间，$T_1, T_2 \in B(X \to X)$，$\forall x \in X$，规定：$(T_1 T_2)x = T_1(T_2 x)$，则把 $T_1 T_2$ 称为 T_1 左乘以 T_2，也称 T_2 右乘以 T_1.

一般地，$T_1 T_2 \neq T_2 T_1$，如果 $T_1 T_2 = T_2 T_1$，则称 T_1 与 T_2 可交换. 可以证明：如果 $T_1, T_2 \in B(X \to X)$，则 $T_1 T_2 \in B(X \to X)$，且有

$$\|T_1 T_2\| \leqslant \|T_1\|\,\|T_2\| \qquad (4.3-12)$$

实际上，$\forall\ x\in X$，

$$\| T_1 T_2 x\| \leqslant \| T_1 \| \| T_2 x\| \leqslant \| T_1 \| \| T_2 \| \| x\|$$

从而 $T_1 T_2\in B(X\to X)$，当 $\| x\| =1$ 时，有

$$\| T_1 T_2 x\| \leqslant \| T_1 \| \| T_2 \|$$

$$\| T_1 T_2 \| = \sup_{\| x\| =1} \| T_1 T_2 x\| \leqslant \| T_1 \| \| T_2 \|$$

如果在线性赋范空间 X的元素之间定义了乘法，且$\forall\ x,\ y\in X$，都有

$$\| xy\| \leqslant \| x\| \| y\|$$

就称 X是赋范代数．因此 $B(X\to X)$是**赋范代数**．完备的赋范代数称为 **Banach 代数**．当 X是 Banach 空间时，则 $B((X\to X)$是一 Banach 代数．

$\forall\ T_1,\ T_2,\ T_3\in B(X\to X)$，规定：$T_1 T_2 T_3 = T_1(T_2 T_3)$，则有$(T_1 T_2)T_3 = T_1(T_2 T_3)$，即算子乘法具有可结合性质．

如果$\forall\ x\in X$，规定：$Ix= x$，则称 I 为 X 中的单位算子（或恒等算子），显然有：$I\in B(X\to X)$且 $\| I\| =1$；$\forall\ T\in B(X\to X)$，$IT= T$，$TI= T$．

$\forall\ T\in B(X\to X)$，规定：$T^0 = I$，$T^1 = T$，$T^2 = TT$，…，$T^n= TT^{n-1}$，…，则 $T^{m+n}= T^m T^n$，并可定义算子多项式为

$$P(T) = a_0 I+ a_1 T+ a_2 T^2 + \cdots + a_n T^n \in B(X\to X)$$

且有

$$\| P(T)\| \leqslant | a_0 |+| a_1 | \| T\| +| a_2 | \| T\|^2 + \cdots +| a_n | \| T\|^n <+ \infty$$

这里
$$P(T)x= a_0 x+ a_1 Tx+ a_2 T^2 x+ \cdots + a_n T^n x$$

下面定理给出 $B(X\to X)$中算子$(I- T)$可逆的一个充分条件，这个定理在应用迭代法求解算子方程时十分有用．

定理 4.3.4(算子的逆) 如果 X是 Banach 空间，$T\in B(X\to X)$，$\| T\| <1$，则算子$(I- T)$是可逆算子，并有

$$(I- T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \tag{4.3-13}$$

这里$(I- T)^{-1}$是线性有界算子．

证 因 $\| T\| <1$，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \| T\|^n$收敛．由于

$$\| \sum_{k=0}^{p} T^{n+k} \| \leqslant \sum_{k=0}^{p} \| T^{n+k} \| \leqslant \sum_{k=0}^{p} \| T\|^{n+k} = \frac{\| T\|^n}{1- \| T\|}$$

可知 $\sum\limits_{k=0}^{n} T^k$ 是 $B(X\to X)$ 中的基本列，再由 $B(X\to X)$完备知，$\exists\ A\in B(X\to X)$，使

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k$$

$$(I- T)A = (I- T)\sum_{k=0}^{\infty} T^n = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1} = I$$

$$A(I- T) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \cdot (I- T) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1} = I$$

所以$(I- T)^{-1} = A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n$． □

例 4.3.9 设 $K(s,t)$ 在矩形 $a\leqslant s, t\leqslant b$ 上连续，$M=\max\limits_{a\leqslant s,t\leqslant b}|K(s,t)|<(b-a)^{-1}$，则线性积分方程

$$x(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t+y(s) \tag{4.3-14}$$

对每一固定的 $y(s)\in C[a,b]$，在 $C[a,b]$ 中有唯一解，此解为

$$x_0(s)=\int_a^b R(s,t)y(t)\,\mathrm{d}t+y(s) \tag{4.3-15}$$

其中

$$R(s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}K^{(n)}(s,t)$$

$$K^{(n)}(s,t)=\underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{n-1\text{个}}K(s,\tau_1)K(\tau_1,\tau_2)\cdots K(\tau_{n-1},t)\,\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_{n-1}$$

证 令 $K: C[a,b]\to C[a,b]$，$\forall x\in C[a,b]$，

$$(Kx)(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t$$

由例 4.3.8 知，K 是线性有界算子，且

$$\|K\|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b|K(s,t)|\,\mathrm{d}t<\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b(b-a)^{-1}\,\mathrm{d}t=1$$

显然积分方程(4.3-14)等价于算子方程

$$(I-K)x=y \tag{4.3-16}$$

由定理 4.3.4 知，$(I-K)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}K^n$，则(4.3-16)式有解：

$$x=(I-K)^{-1}y=\sum_{n=1}^{\infty}K^n y+y$$

即(4.3-15)式成立.

4.4 线性算子的基本定理

本节介绍线性算子理论的三个基本定理，即 Banach 逆算子定理、闭图象定理和巴拿赫—斯坦图豪斯(Banach-Steinhaus)共鸣定理. 它们与泛函延拓定理一起在理论上奠定了泛函分析的基础，常常被认为是赋范空间中的泛函分析的四大基石. 这些定理在证明上具有一定的技巧，在应用上非常广泛.

4.4.1 逆算子定理

在上节我们定义了算子的加法、数乘及算子的乘法运算. 在这里，我们需要考虑算子的"除法"运算，因为它与求解各类算子方程密切相关. 例如：设 $F: X\to Y$，考虑算子方程

$$Fx=y \tag{4.4-1}$$

如果映射 F 存在逆映射 F^{-1}，则(4.4-1)式的解为 $x=F^{-1}y$.

设 X_1，X_2 是同一数域 Λ 上的两个线性赋范空间，$F: D(F)\to X_2$，为一算子(映射).

定义 4.4.1(逆算子) 算子 F 称为可逆算子，是指 F 实现了定义域 $D(F)$ 与值域

$R(F)\subset X_2$ 之间的一一对应．用 F^{-1} 记 F 的逆对应，并称 F^{-1} 为 F 的逆算子(或逆映射)．

下面的结果是明显的：

(1) $D(F^{-1})=R(F)$，$R(F^{-1})=D(F)$；

(2) 当 F 是线性算子时，F^{-1} 也是线性算子；

(3) $F^{-1}F=I_{D(F)}$，$FF^{-1}=I_{R(F)}$．

证 仅证(2)，由于 F 是线性算子，且 F 可逆，故 $\forall\ y_1, y_2\in R(F)$，$\exists\ x_1, x_2\in D(F)$，使 $Fx_1=y_1$，$Fx_2=y_2$，即 $x_1=F^{-1}y_1$，$x_2=F^{-1}y_2$．$\forall\ \alpha,\beta\in\Lambda$，有

$$F(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Fx_1+\beta Fx_2=\alpha y_1+\beta y_2$$

所以

$$F^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha x_1+\beta x_2=\alpha F^{-1}y_1+\beta F^{-1}y_2$$

即 F^{-1} 是线性算子．

定义 4.4.2(正则算子) 设 X_1，X_2 是同一数域 Λ 上的线性赋范空间，F: $D(F)(\subset X_1)\to X_2$ 是线性算子，如果 F 还满足：

(1) F 是可逆算子，

(2) F 是满射，即 $R(F)=X_2$，

(3) F^{-1} 是有界线性算子，

则称 F 是正则算子．

注 4.4.1 特别情况：如果 F: $X_1\to X_2$，$D(F)=X_1$，$R(F)=X_2$，且 F 可逆，则显然有

$$F^{-1}F=I_{X_1},\ FF^{-1}=I_{X_2} \tag{4.4-2}$$

其中 I_{X_1}，I_{X_2} 分别是 X_1，X_2 上的恒等算子．

当 F: $X_1\to X_2$ 是正则算子时，算子方程(4.4-1)对任何 $y\in X_2$ 有唯一的连续解 $x=F^{-1}(y)$．

考虑如下的问题，设 $T\in B(X_1\to X_2)$ 可逆，且 T 满射($R(T)=X_2$)，问：T^{-1} 是否有界(即 T 是否是正则算子)？

在一般情况下，答案是否定的．例如：考虑积分算子 T: $C[0,1]\to C^1[0,1]$，$(Tx)(t)=\int_0^t x(t)\,\mathrm{d}t$，$\forall\ x\in C[0,1]$，则 $T^{-1}x=x'(t)$，$\forall\ x\in C^1[0,1]$，是无界算子．如果进一步假定 T 的值域是完备的，情况就不同了，此时有下面定理．

定理 4.4.1(Banach 逆算子定理) 设 T 是 Banach 空间 X_1 到 Banach 空间 X_2 的可逆、满射的线性有界算子，则 T 的逆算子 T^{-1} 是有界算子(即正则算子)．

为了证明定理 4.4.1，需要所谓的开映射定理作为辅助定理．开映射定理的证明的确不易，要用到较多的预备知识，这里不给出其证明(可参看文献[1]或[3])．这里仅给出开映射的定义及开映射定理的结论．

定义 4.4.3(开映射) 设 X_1，X_2 是线性赋范空间，如果映射 T 把 $D(T)(\subset X_1)$ 中的任何开集映射为 $R(T)$ 的开集，则称 T 为开映射．

注 4.4.2 这里要注意区分连续映射与开映射的差别．例如：f: $\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$，$f(x)=\sin x$，$\forall\ x\in\mathbf{R}^1$，则 f 连续，f 把开集$(0,2\pi)$映为闭集$[-1,1]$，所以 f 不是开映射．还可以证明：T: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$，$\forall\ x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$，$Tx=(x_1,0)$，则 T 不是开映射．T: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$，$Tx=x_1\in R^1$，则 T 是开映射．

引理 4.4.1(开映射定理)　设 X_1，X_2 都是 Banach 空间，$T\in B(X_1\to X_2)$，并且 $R(T)=X_2$，则 T 必为开映射. □

下面应用开映射定理证明定理 4.4.1. 记 $S(0,1)=\{x\in X_1 \mid \|x\|<1\}$，由引理 4.4.1 知 $TS(0,1)$是 X_2 中的开集，又因 $0\in TS(0,1)$，故存在 $\delta>0$，使得

$$S(0,\delta)\subset TS(0,1)$$

对任何 $y\in S(0,\delta)$，存在 $x\in S(0,1)$，使 $y=Tx$，即 $T^{-1}(y)=x\in S(0,1)$，所以 $T^{-1}(y)\in S(0,1)$，即当 $\|y\|<\delta$时，$\|T^{-1}(y)\|\leqslant 1$. 对 $u\in X_2$，令 $y=\dfrac{\delta}{2\|u\|}u$，$\|y\|=\dfrac{\delta}{2}<\delta$，故有

$$\begin{aligned}\|T^{-1}(y)\| &= \left\|T^{-1}\frac{\delta}{2\|u\|}u\right\| = \left\|\frac{\delta}{2\|u\|}T^{-1}u\right\| \\ &= \frac{\delta}{2\|u\|}\|T^{-1}u\|\leqslant 1\end{aligned}$$

即
$$\|T^{-1}u\|\leqslant \frac{2}{\delta}\|u\| = M\|u\| \quad \left(M=\frac{2}{\delta}\right)$$

故 T^{-1}有界. □

应用 Banach 逆算子定理可以得到 Banach 空间上范数等价的一个结果.

推论 4.4.1　设 X是线性空间，它在 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 下均为 Banach 空间，如果存在常数 $M_1>0$，使 $\|x\|_2\leqslant M_1\|x\|_1(\forall x\in X)$，则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

证　设 $I: X\to X$是恒等算子，把 I看作$(X,\|\cdot\|_1)\to(X,\|\cdot\|_2)$线性算子，由于 $\forall x\in X$，$\|x\|_2\leqslant M_1\|x\|_1$，则 I满足定理 4.4.1 的条件，根据定理 4.4.1 知 $\exists M_2$，使 $\|I^{-1}x\|_1\leqslant M_2\|x\|_2$，即 $\|x\|_1\leqslant M_2\|x\|_2$，因此 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

4.4.2　闭图象定理

我们知道：一元函数 $y=f(x)$的图象可以看作 $\mathbf{R}^2$ 中的点集：

$$G(f)=\{(x,y) \mid y=f(x),\ x\in D(f)\}$$

仿此可以定义算子图象.

定义 4.4.4(闭算子)　设 X_1，X_2 是线性赋范空间，$T: D(T)(\subset X_1)\to X_2$ 是线性算子，若 T 的图象

$$G(T)=\{(x,y) \mid y=Tx,\ x\in D(T)\} \tag{4.4-3}$$

是乘积空间 $X_1\times X_2$ 中的闭集，则称 T是**闭线性算子**(简称**闭算子**).

$X_1\times X_2$ 中的范数可定义为

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\| \tag{4.4-4}$$

当 X_1，X_2 都是 Banach 空间时，$X_1\times X_2$ 也是 Banach 空间.

下面给出闭算子的等价条件，利用这一等价条件来验证线性算子是否为闭算子比较方便.

引理 4.4.2(闭算子的等价条件)　设 X_1，X_2 是线性赋范空间，$T: D(T)(\subset X_1)\to X_2$ 是线性算子，则 T 为闭算子 $\Longleftrightarrow$ $\forall x_n\in D(T)$，当 $x_n\to x\in X_1$，$Tx_n\to y\in X_2$ 时，必有 $x\in D(T)$且 $Tx=y$.

证 $\Rightarrow$ 如果 T 是闭算子，那么当 $x_n\in D(T)$，$x_n\to x$，$Tx_n\to y$ 时，显然有 $(x_n, Tx_n)\subset G(T)$，而且在乘积空间 $X_1\times X_2$ 中有 $(x_n, Tx_n)\to(x, y)$，由于 $G(T)$ 是 $X_1\times X_2$ 中的闭集，故 $(x, y)\in G(T)$，即 $x\in D(T)$，$y=Tx$.

$\Leftarrow$ $\forall(x_n, Tx_n)\in G(T)$，当 $(x_n, Tx_n)\to(x, y)$ 时，显然有 $x_n\to x$，$Tx_n\to y$，由条件知 $x\in D(T)$ 且 $y=Tx$，则有 $(x, y)=(x, Tx)\in G(T)$，即 $G(T)$ 中每一收敛点列的极限都在 $G(T)$ 中，所以 $G(T)$ 是闭集，即 T 是闭算子. □

对于线性算子，已有三个重要的概念即连续性、有界性及闭性. 我们已经知道，对于线性算子，连续性与有界性是等价的. 因此，对于线性算子实质上只有两个不同的概念，即有界性与闭性. 下面我们来研究有界性与闭性的关系，即有界线性算子在什么条件下是闭线性算子？闭线性算子在什么条件下是有界线性算子？

定理 4.4.2 设 $T: D(T)(\subset X_1)\to X_2$ 是线性有界算子，如果 $D(T)$ 是 X_1 的闭线性子空间，则 T 为闭线性算子. 特别地，当 $D(T)=X_1$ 时，T 是闭线性算子.

证 $\forall(x_n, Tx_n)\in G(T)$，当 $(x_n, Tx_n)\to(x, y)$ 时，要证 $(x, y)\in G(T)$. 因为 $(x_n, Tx_n)\to(x, y)\Longleftrightarrow x_n\to x$，$Tx_n\to y$. 由于 $D(T)$ 闭，故 $x\in D(T)$，再由 T 有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n=Tx$，所以 $y=Tx$. 由引理 4.4.2 知 T 是闭线性算子. □

定理 4.4.3(闭图象定理) 设 X_1，X_2 都是 Banach 空间，$T: D(T)(\subset X_1)\to X_2$ 是闭线性算子，其中 $D(T)$ 是 X_1 的闭线性子空间，则 T 是连续线性算子.

证 因为 $D(T)$ 是 X_1 的一个闭子空间，故它本身按 X_1 上的范数可视为一个 Bananch 空间，又 T 是线性算子，易知 $G(T)$ 是 $X_1\times X_2$ 的一个线性子空间. 再由假设 $G(T)$ 是闭的，故 $G(T)$ 是 $X_1\times X_2$ 的闭子空间，从而按 $X_1\times X_2$ 上的范数 $G(T)$ 是 Banach 空间. 今定义线性算子 $A: G(T)\to D(T)$ 如下：

$$A(x, Tx)=x,\ \forall(x, Tx)\in G(T)$$

则 A 是一对一的. 事实上，若 $x_1=x_2$，则 $Tx_1=Tx_2$，从而 $(x_1, Tx_1)=(x_2, Tx_2)$. A 显然有界. 根据逆算子定理，A 具有有界逆 $A^{-1}: D(T)\to G(T)$，从而

$$\|(x, Tx)\|=\|A^{-1}(x)\|\leqslant\|A^{-1}\|\|x\|\qquad\forall x\in D(T)$$

于是

$$\|Tx\|\leqslant\|(x, Tx)\|\leqslant\|A^{-1}\|\|x\|\qquad\forall x\in D(T)$$

由此可知 T 是有界算子，即 T 连续. □

当 $D(T)=X_1$ 时，应用定理 4.4.2、定理 4.4.3 可得下面推论.

推论 4.4.2 设 X_1，X_2 都是 Banach 空间，$T\in(X_1\to X_2)$，则

$$T\text{有界}\Longleftrightarrow T\text{闭}$$ □

注 4.4.3 闭图象定理在验证线性算子为有界算子时是经常要用到的，特别是用泛函分析方法研究偏微分方程时显得尤为重要. 由于偏微分算子直接验证其连续性比较困难，往往先验证偏微分算子是闭算子，再用闭图象定理来证明它是连续算子.

给出下面两例，以说明线性算子的闭性与连续性是不同的两个概念.

例 4.4.1 取 $X=C[0, 1]$，$D(T)=\{x\in X|x'(t)\in C[0, 1]\}$，定义 $T: D(T)\to X=C[0, 1]$ 如下：$\forall x\in D(T)$，$Tx=x'(t)$，则 T 是无界的，但 T 是闭线性算子.

证 由例 4.3.6 可知 T 是无界算子. 下证 T 是闭算子. 设 $x_n\in D(T)$，且 $x_n\to x$，

$Tx_n \to y$. 因为在 $C[0,1]$中的收敛是函数列的一致收敛，由 $x_n'(t)=Tx_n(t)\to y(t)$，即 $x_n'(t)$在$[0,1]$上一致收敛于 $y(t)$，所以有

$$\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t \lim_{n\to\infty} x_n'(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
$$=\lim_{n\to\infty}[x_n(t)-x_n(0)]=x(t)-x(0)$$

即 $x(t)=x(0)+\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau$，从而 $x\in D(T)$，且 $Tx=x'=y$. 由引理 4.4.2 知 T是闭算子.

例 4.4.1 说明闭性不蕴含有界性，下例说明有界性不蕴含闭性.

例 4.4.2 取 $X=C[a,b]$，$D(T)=P[a,b]$是$[a,b]$上的实系数多项式的全体，则$D(T)$是 $C[a,b]$的线性子空间，$D(T)$是 $C[a,b]$的真子空间. 取 $T: D(T)\to C[a,b]$为恒等算子. 显然，算子 T是有界算子，但 T不是闭算子. 事实上，取 $x(t)=\sin t\in X-D(T)$，由$D(T)$在 $X=C[a,b]$中稠密可知，存在 $x_n\in D(T)$，使 $x_n\to x\in X$，$Tx_n=x_n\to x\in X$，但$(x,x)=[\sin t,\sin t]\notin G(T)$，故 T不是闭算子.

4.4.3 共鸣定理

在许多数学问题中，人们经常遇到的不只是单个的线性有界算子，而是一族线性有界算子. 并需要讨论这一族线性有界算子在什么条件下一致有界？关于这一问题，巴拿赫—斯坦因豪斯(Banach－Steinhaus)给出了一个非常漂亮的结果，即共鸣定理.

定理 4.4.4(Banach－Steinhaus 共鸣定理) 设 X_1 是 Banach 空间，X_2 是线性赋范空间，$\{T_\tau|\tau\in\Lambda\}$是一族 $X_1\to X_2$ 的线性有界算子(这里 Λ是指标集)，则$\{\|T_\tau\|,\tau\in\Lambda\}$有界$\Longleftrightarrow$对每一 $x\in X_1$，$\{\|T_\tau x\|,\tau\in\Lambda\}$有界.

证 $\Rightarrow$ 由$\{\|T_\tau\|,\tau\in\Lambda\}$有界，则 $\exists M>0$，使$\forall\tau\in\Lambda$，有 $\|T_\tau\|\leqslant M$. $\forall x\in X_1$ (x固定)，有

$$\|T_\tau x\|\leqslant\|T_\tau\|\,\|x\|\leqslant M\|x\|\qquad\forall\tau\in\Lambda$$

即$\{\|T_\tau x\|,\tau\in\Lambda\}$有界.

$\Leftarrow$ 用反证法. 设$\sup\limits_{\tau\in\Lambda}\|T_\tau\|=+\infty$，则可证在任何闭球上$\{\|T_\lambda x\|,\lambda\in\Lambda\}$都无界. 事实上，设$\{\|T_\tau x\|,\tau\in\Lambda\}$在闭球 $\bar{B}(x_0,r)$上有界，即 $\|T_\tau x\|\leqslant M=$常数，$\forall x\in\bar{B}(x_0,r)$，$\tau\in\Lambda$都成立。$\forall y\in X_1$，$y\neq0$，令 $x=\dfrac{r}{\|y\|}y+x_0$，则 $x\in\bar{B}(x_0,r)$，从而 $\|T_\tau x\|\leqslant M$，即

$$\left\|\frac{r}{\|y\|}T_\tau y+T_\tau x_0\right\|\leqslant M \tag{4.4-5}$$

由假设$\sup\limits_{\tau\in\Lambda}\|T_\tau x_0\|=M_1<+\infty$，从而由(4.4-5)式得

$$\|T_\tau y\|\leqslant\frac{M+M_1}{r}\|y\|$$

由 $y\in X_1$ 的任意性，得 $\|T_\tau\|\leqslant\dfrac{M+M_1}{r}<+\infty$，这与$\sup\limits_{\tau\in\Lambda}\|T_\tau\|=+\infty$相矛盾.

在 X_1 中任取开球 $B_1=B_1(x_0,r_0)$，由于$\{\|T_\tau x\|,\tau\in\Lambda\}$在 $\bar{B}_1$ 上无界，则存在 T_1 及$x_1\in B_1$，使

$$\| T_1 x_1 \| > 1$$

由 T_1 的连续性，则有开球 $B_1 = B_1(x_1, r_1) \subset B_r$，使 $\| T_1 x \| > 1$，$\forall x \in B_1$，这里可取 $r_1 < \frac{1}{2} r_0$. 再由$\{ \| T_\tau x \|, \tau \in A \}$在 B_1 上无界，则存在 T_2 及 $x_2 \in B_1$，使

$$\| T_2 x_2 \| > 2$$

由 T_2 的连续性，则有开球 $B_2 = B_2(x_2, r_2) \subset B_1$，使 $\| T_2 x \| > 2$，$\forall x \in B_2$，且 $r_2 < \frac{1}{2} r_1$. 继续以上的作法，可得有界算子列$\{T_n\}$及一串闭球$\{\bar{B}_n\}$，$\bar{B}_n$ 满足：$\bar{B}_1 \supset \bar{B}_2 \supset \cdots \supset \bar{B}_n \supset \cdots$，$r_n \to 0$，且有

$$\| T_n x \| \geqslant n \qquad \forall x \in \bar{B}_n;\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

由于 X_1 是 Banach 空间，故存在唯一点 $x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n$，从而

$$\| T_n x^* \| \geqslant n \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

这与对每一固定的 $x \in X_1$，$\sup_{\tau \in A} \| T_\tau x \|$ 有界相矛盾. □

注 4.4.4 共鸣定理告诉我们，为了证明线性有界算子族$\{T_\tau, \tau \in A\}$一致有界，只要证明对 Banach 空间 X_1 中的每一个 x，$\{T_\tau x, \tau \in A\}$在 X_2 中有界即可，因此，共鸣定理也称为一致有界原理.

4.4.4 应用举例

这里举几个例子，说明逆算子定理、闭图象定理和共鸣定理的应用.

例 4.4.3(线性微分方程解的连续依赖性) 设 $p_1(t), p_2(t), \cdots, p_k(t) \in C[a, b]$，考虑 k 阶线性微分方程的初值问题：

$$x^{(k)} + p_1 x^{(k-1)} + \cdots + p_k x = y \tag{4.4-6}$$

$$x(a) = x'(a) = \cdots = x^{(k-1)}(a) = 0 \tag{4.4-7}$$

由常微分方程的基本理论可知，$\forall y \in C[a, b]$，初值问题(4.4-6)、(4.4-7)有唯一 k 阶连续可微解 x. 证明：解 x 连续地依赖于 y.

证 用 $C^k[a, b]$记$[a, b]$具有 k 阶连续导数的函数的全体，对 $x \in C^k[a, b]$，规定

$$\| x \| = \sum_{i=0}^{k} \max_{t \in [a, b]} | x^{(i)}(t) |$$

则 $C^k[a, b]$构成 Banach 空间，考虑 $C^k[a, b]$的子空间

$$C_0^k[a, b] = \{ x \mid x \in C^k[a, b],\ x(a) = x'(a) = \cdots = x^{(k-1)}(a) = 0 \}$$

则 $C_0^k[a, b]$是 $C^k[a, b]$的闭子空间，故 $C_0^k[a, b]$是 Banach 空间. 定义算子 $T: C_0^k[a, b] \to C[a, b]$如下：$\forall x \in C_0^k[a, b]$，

$$Tx = x^{(k)} + p_1 x^{(k-1)} + \cdots + p_k x$$

由于 $p_i (1 \leqslant i \leqslant k)$是$[a, b]$上的连续函数，故

$$\| Tx \| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} | (Tx)(t) |$$

$$\leqslant \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \max_{a \leqslant t \leqslant b} | p_i(t) | \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \max_{a \leqslant t \leqslant b} | x^{(i)}(t) | \right)$$

$$= \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \| p_i \|\right) \| x \|$$

即 T 是有界线性算子.

再由于 $\forall\, y \in C[a, b]$，初值问题(4.4-6)、(4.4-7)有唯一解 x，因而 T 是 $C_0^k[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 的一一映射. 由逆算子定理可知：T^{-1} 是 $C[a, b] \to C_0^k[a, b]$ 的连续线性算子，则 $x = T^{-1} y$.

$$\| x \| \leqslant \| T^{-1} \| \, \| y \| \tag{4.4-8}$$

这就是说，当 $y \in C[a, b]$ 作微小变化时，相应地，初值问题的解 x 也只作微小的变化，即 x 连续地依赖于 y.

例 4.4.4 设无穷矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \end{bmatrix}$$

满足 $\sum_{i=1}^{\infty} | a_{ij} |^2 < \infty$，$j = 1, 2, 3, \cdots$，并对任何

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) \in l^2$$

有

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \end{bmatrix}$$

$$= (y_1, y_2, \cdots, y_j, \cdots) \in l^2 \tag{4.4-9}$$

其中，$y_j = \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_{ij}$，$j = 1, 2, \cdots$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 是连续算子.

证 因为 l^2 是 Banach 空间，由(4.4-9)式知，$\boldsymbol{A} \in (l^2 \to l^2)$，由闭图象定理可知，要证 $\boldsymbol{A}$ 连续，只须证 $\boldsymbol{A}$ 闭即可.

$$\forall\, (\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n) \in G(\boldsymbol{A}),\ (\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n) \to (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in l^2 \times l^2$$

即 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x} \in l^2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{y} \in l^2$. 要证 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in G(\boldsymbol{A})$，即要证 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. 记

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n = (y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \cdots, y_j^{(n)}, \cdots)$$

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_j, \cdots)$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \cdots, y_j^{(0)}, \cdots)$$

由 $\boldsymbol{A}x_n \to \boldsymbol{y}$ 知，对每个 j，有

$$| y_j^{(n)} - y_j | \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} | y_j^{(n)} - y_j |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \qquad n \to \infty$$

另一方面，对每个 j，有

$$
\begin{aligned}
|y_j^{(n)} - y_j^{(0)}| &= \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}(x_i^{(n)} - x_i)\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}(x_i^{(n)} - x_i)| \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| \to 0 \qquad n\to\infty
\end{aligned}
$$

所以 $y_j = y_j^{(0)}$，即 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. 由引理 4.4.2 知 $\boldsymbol{A}$ 是闭线性算子.

例 4.4.5 设 $p>1$，$g(t)$是区间$[a, b]$上的可测函数. 如果对于任何 $x(t)\in L^p[a, b]$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$，积分（$L$ 积分）$\int_a^b x(t)g(t)\,\mathrm{d}t$都存在，则 $g(t)\in L^q[a, b]$.

证 对每一自然数 n，令

$$
g_n(t) = \begin{cases} g(t) & |g(t)| \leqslant n \\ 0 & |g(t)| > n \end{cases}
$$

则 $g_n(t)$是有界可测函数，作 $L^p[a, b]$上的线性泛函，

$$
F_n(x) = \int_a^b x(t)g_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad x\in L^p[a, b] \tag{4.4-10}
$$

应用 Hölder 不等式，易知 $F_n(n=1, 2, 3, \cdots)$是 $L^p[a, b]$上的有界线性泛函. 由题设易知 $|x(t)g(t)|$可积. 因为$|x(t)g_n(t)|\leqslant|x(t)g(t)|$，对(4.4-10)式应用控制收敛定理，有

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b x(t)g_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b (\lim_{n\to\infty} x(t)g_n(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)g(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

根据共鸣定理知$\{\|F_n\|\}$有界. 再由

$$
\begin{aligned}
F_n(\operatorname{sgn} g_n(t)\,|g_n(t)|^{q-1}) &= \int_a^b |g_n(t)|^q\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \|F_n\|\,\|\operatorname{sgn} g_n(t)\,|g_n(t)|^{q-1}\|_{L^p} \\
&= \|F_n\|\left(\int_a^b |g_n(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}
\end{aligned}
$$

即知 $\left(\int_a^b |g_n(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} \leqslant \|F_n\|$，因此$\left\{\int_a^b |g_n(t)|^q\,\mathrm{d}t\right\}$有界. 最后由

$$
\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_a^b |g_n(t)|^q\,\mathrm{d}t < +\infty
$$

可得 $g(t)\in L^q[a, b]$.

例 4.4.6（Fourier 级数发散问题） 存在一个实值的周期为 2π 的连续函数，它的 Fourier 级数在 $t=0$ 点是发散的.

证 用 $C_{2\pi}$记周期为 2π 的实值连续函数的全体，对 $f\in C_{2\pi}$，f 导出的 Fourier 级数为

$$
\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt) \tag{4.4-11}
$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t \qquad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \qquad n=1,2,\cdots$$

当 $t=0$ 时，级数为 $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，其前 $n+1$ 项部分和为

$$S_n(f)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]\mathrm{d}t$$

记 $K_n(t)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kt$．经过简单计算可得

$$K_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

现在要证明，存在 $f\in C_{2\pi}$，使

$$S_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)K_n(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.4-12}$$

组成的数列$\{S_n(f)\}$发散．为此，我们将证明存在 $f\in C_{2\pi}$，使$\{S_n(f)\}$无界．由(4.4-12)式易知 S_n：$C_{2\pi}\to\mathbf{R}^1$ 是线性泛函，且

$$\begin{aligned}|S_n(f)|&\leqslant\max_{-\pi\leqslant t\leqslant\pi}|f(t)|\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(t)|\,\mathrm{d}t\\&=M_n\|f\|\end{aligned}$$

其中 $M_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(t)|\,\mathrm{d}t$．这说明 S_n 是 $C_{2\pi}$上的线性连续泛函．还可以进一步证明(证略)．

$$\|S_n\|=M_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(t)|\,\mathrm{d}t \tag{4.4-13}$$

注意，$C_{2\pi}$是 Banach 空间，为了证明存在 $f\in C_{2\pi}$，使$\{S_n(f)\}$无界，根据共鸣定理，只要证明$\{\|S_n\|\}$无界即可．由(4.4-13)式，有

$$\begin{aligned}\|S_n\|&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right|\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)s}{\sin s}\right|\mathrm{d}s\\&\geqslant\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin(2n+1)s|}{s}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{1}{2}(2n+1)\pi}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u\to\infty \qquad n\to\infty\end{aligned}$$

即$\{\|S_n\|\}$无界．

注 4.4.5 例 4.4.6 说明：要求每个以 2π 为周期的连续函数的 Fourier 级数都收敛是

做不到的. 早在20世纪初由费页(Fejér)给出了构造性的反例. 在例4.4.6中，我们应用泛函分析的观点和方法，证明了Fourier级数不收敛于自身的连续函数的存在性. 这个证明方法是非构造性，远比构造性方法简单，体现了泛函分析高度抽象概括的特点.

4.5 强收敛、弱收敛与一致收敛

在微积分中，对于函数列的收敛，最常见的有逐点收敛与一致收敛. 由于考虑问题的不同，在不同场合应用不同的收敛性. 在抽象空间中，点列、泛函列、算子列也有类似的收敛性. 在本节中，我们来介绍点列及算子列的其它收敛性.

4.5.1 赋范空间中点列的强收敛与弱收敛

定义4.5.1(强收敛、弱收敛) 设 X 是线性赋范空间，$x_n\in X$.

(1) 如果存在 $x\in X$，使得 $\|x_n-x\|\to 0$，则称点列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x，记为 $x_n\to x$；

(2) 如果存在 $x\in X$，对任何 $f\in X^*$，有 $|f(x_n)-f(x)|\to 0$，则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x，记为 $x_n\xrightarrow{弱}x$，并称 x 为 $\{x_n\}$ 的弱极限.

由定义可知，点列 $\{x_n\}$ 强收敛就是 $\{x_n\}$ 按范数收敛；$\{x_n\}$ 弱收敛是指对任何 $f\in X^*$，数列 $\{a_n\}=\{f(x_n)\}$ 都收敛.

弱收敛点列有以下的性质.

定理4.5.1(性质) 设 $\{x_n\}\subset X$，$x\in X$.

(1) 若 $x_n\xrightarrow{弱}x$，则弱极限 x 唯一；

(2) 如果 $x_n\to x$，则 $x_n\xrightarrow{弱}x$，反之不真；

(3) 如果 $x_n\xrightarrow{弱}x$，则数列 $\{\|x_n\|\}$ 有界.

证 (1) 设 $x_n\xrightarrow{弱}x$，且 $x_n\xrightarrow{弱}x'$，则 $\forall f\in X^*$，$f(x_n)\to f(x)$，且 $f(x_n)\to f(x')$，由于数列 $\{f(x_n)\}$ 的极限唯一，故 $f(x)=f(x')$，即 $f(x)-f(x')=f(x-x')=0$，$\forall f\in X^*$. 如果 $x'\neq x$，则 $x-x'\neq 0$，由Hahn-Banach定理知，存在 $f_0\in X^*$，使 $\|f_0\|=1$，$f_0(x-x')=\|x-x'\|\neq 0$，这就得到矛盾，故 $x'=x$.

(2) $\forall f\in X^*$，有 $|f(x_n)-f(x)|\leqslant\|f\|\,\|x_n-x\|$. 由 $\|x_n-x\|\to 0$，则 $|f(x_n)-f(x)|\to 0$，所以 $x_n\xrightarrow{弱}x$.

$x_n\xrightarrow{弱}x$，而 $x_n\nrightarrow x$ 的例子. 取 H 为希尔伯特空间，$\{e_n\}$ 是 H 的标准正交系，$\forall f\in H^*$，存在唯一 $z\in H$，有

$$f(x)=(x,z)\qquad\forall x\in H$$

于是 $f(e_n)=(e_n,z)$，由Bessel不等式，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(e_n,z)|^2\leqslant\|z\|^2$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|(e_n,z)|^2$ 收敛，故 $f(e_n)=(e_n,z)\to 0=f(0)$. 由于 $f\in H^*$ 任意，故 $e_n\xrightarrow{弱}$

0，但是

$$\|e_m - e_n\|^2 = (e_m - e_n, e_m - e_n) = 2 \qquad m \neq n$$

所以$\{e_n\}$不强收敛.

(3) 因为$\forall f \in X^*$，数列$\{f(x_n)\}$收敛，所以它是有界的，即$\exists C_f > 0$，使$|f(x_n)| \leqslant C_f$.（这里C_f与f有关与n无关）. 通过映射T: $x \to \tilde{x} \in X^{**}$（定理4.2.3），并应用（4.2.10）式（即$\tilde{x}_n(f) = f(x_n)$）定义$\tilde{x}_n \in X^{**}$. 对所有的$n$，

$$|\tilde{x}_n(f)| = |f(x_n)| \leqslant C_f$$

即$\forall f \in X^*$，数列$\{\tilde{x}_n(f)\}$有界，又因为X^*是Banach空间，利用共鸣定理，可得$\{\|\tilde{x}_n\|\}$是有界的，再应用（4.2-11）式得$\{\|x_n\|\} = \{\|\tilde{x}_n\|\}$有界. □

我们知道，在微积分中只有数列收敛的概念，没有强收敛与弱收敛之分，原因在于数列所在的空间$\mathbf{R}^1$是一维线性赋范空间. 下面要证在有限维空间上，点列弱收敛与强收敛是相同的. 这说明弱收敛的概念在本质上仅对无穷维空间有意义.

定理 4.5.2 设X是有限维线性赋范空间，$\{x_n\} \subset X$，$x \in X$，则

$$x_n \to x \Longleftrightarrow x_n \xrightarrow{\text{弱}} x$$

证 $\Rightarrow$ 显然成立.

$\Leftarrow$ 设X是k维的，$x_n \xrightarrow{\text{弱}} x$，$e_1, e_2, \cdots, e_k$是$X$的一组基，则

$$x_n = a_1^{(n)} e_1 + a_2^{(n)} e_2 + \cdots + a_k^{(n)} e_k$$
$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_k e_k$$

令$G_i = \operatorname{span}\{e_1, \cdots, e_{i-1}, e_{i+1}, \cdots, e_k\}$，是$X$的$k-1$维子空间，从而$G_i$是闭子空间，$d_i = d(e_i, G_i) > 0$（$i = 1, 2, \cdots, k$），由Hahn-Banach定理的推论4.2.2知，存在$f_i \in X^*$，使

$$f_i(e_i) = d_i > 0, \quad f_i(e_j) = 0 \qquad j \neq i$$

记$\bar{f}_i = \dfrac{1}{d_i} f_i$（$i = 1, 2, \cdots, k$），则有

$$\bar{f}_i(e_i) = 1, \quad \bar{f}_i(e_j) = 0 \qquad j \neq i$$

于是

$$\bar{f}_i(x_n) = a_i^{(n)}, \quad \bar{f}_i(x) = a_i \qquad i = 1, 2, \cdots, k$$
$$\bar{f}_i(x_n) \to \bar{f}_i(x) \Longleftrightarrow a_i^{(n)} \to a_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

因此

$$\|x_n - x\| = \left\|\sum_{i=1}^{k} (a_i^{(n)} - a_i) e_i\right\|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} |a_i^{(n)} - a_i| \, \|e_i\| \to 0 \qquad n \to \infty$$

即知$x_n \to x$. □

例 4.5.1 在$\mathbf{R}^n$中，弱收敛与强收敛等价.

例 4.5.2 在希尔伯特空间H中，点列$x_n \xrightarrow{\text{弱}} x \Longleftrightarrow \forall z \in H$，有

$$(x_n, z) \to (x, z)$$

定理 4.5.3(弱收敛的等价条件) 设 X 是线性赋范空间，$\{x_n\}\subset X$，$x_0\in X$，则 $x_n \xrightarrow{\text{弱}} x$ $\Longleftrightarrow$ 以下两条同时成立：

(1) $\{\|x_n\|\}$ 有界；

(2) 存在 X^* 的一个稠密子集 M^*，使 $\forall f\in M^*$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

证 $\Rightarrow$ 若 $x_n \xrightarrow{\text{弱}} x_0$，根据定理 4.5.1 的结论(3)知 $\{\|x_n\|\}$ 有界，而条件(2)显然成立.

$\Leftarrow$ 由(1)存在常数 $K>0$，使 $\|x_n\|\leqslant K$，$n=0,1,2,3,\cdots$. 因 M^* 在 X^* 中稠密，于是 $\forall f\in X^*$ 及 $\forall \varepsilon>0$，$\exists f_\varepsilon\in M^*$，使

$$\|f-f_\varepsilon\|<\varepsilon$$

从而

$$\begin{aligned}|f(x_n)-f(x_0)| &\leqslant |f(x_n)-f_\varepsilon(x_n)|+|f_\varepsilon(x_n)-f_\varepsilon(x_0)|+|f_\varepsilon(x_0)-f(x_0)|\\ &\leqslant 2K\varepsilon+|f_\varepsilon(x_n)-f_\varepsilon(x_0)|\end{aligned}$$

根据假设条件(2)可见

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$$

即 $x_n \xrightarrow{\text{弱}} x_0$. □

推论 4.5.1 设 H 是希尔伯特空间，$\{e_n\}$ 是 H 的完全标准正交系，则 H 中点列 $x_n \xrightarrow{\text{弱}} x_0 \Longleftrightarrow$ 以下两条同时成立：

(1) $\{\|x_n\|\}$ 有界；

(2) 对每一 e_k，$k=1,2,3,\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,e_k)=(x_0,e_k)$.

证 根据定理 4.5.3，只要能证明有 $M\subset H$，M 在 H 中稠密，$\forall z\in M$，成立 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,z)=(x_0,z)$，则推论成立. 事实上，由于 $\{e_n\}$ 是 H 的完全标准正交系，故 $\forall z\in H$，有 $z=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(z,e_n)e_n$，记 $z_k=\sum\limits_{i=1}^{k}(z,e_i)e_i$，则 $z_k\to z$ 从而 $M=\operatorname{span}\{e_n\}$ 在 H 中稠密. $\forall z\in M$，则 $z=\sum\limits_{i=1}^{n_0}\alpha_i e_i$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(x_n,z) &= \lim_{n\to\infty}\left(x_n,\sum_{i=1}^{n_0}\alpha_i e_i\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n_0}\bar{\alpha}_i(x_n,e_i)\\ &=\sum_{i=1}^{n_0}\bar{\alpha}_i(x_0,e_i)=\left(x_0,\sum_{i=1}^{n_0}\alpha_i e_i\right)=(x_0,z)\end{aligned}$$

□

例 4.5.3 在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中，$x_n \xrightarrow{\text{弱}} x_0 \Longleftrightarrow \{x_n\}$ 满足：

(1) $\{\|x_n\|\}$ 有界；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}x_0(t)\,\mathrm{d}t$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x_n(t)\begin{pmatrix}\cos kt\\ \sin kt\end{pmatrix}\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}x_0(t)\begin{pmatrix}\cos kt\\ \sin kt\end{pmatrix}\mathrm{d}t.$

证 由于 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt,\cdots\right\}$ 是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的完全

标准正交系. 根据推论 4.5.1 便得结论.

例 4.5.4 设 X 是线性赋范空间, M 是 X 的闭线性子空间, 证明: 如果 $\{x_n\}\subset M$, 并且 $x_n \xrightarrow{弱} x_0$, 则 $x_0\in M$.

证 如果 $x_0\in M$, 因 M 闭, 故 $d(x_0, M)=d>0$, 由泛函延拓定理可知, $\exists\, f\in X^*$, 使

$$f(x_0)=d,\ f(x)=0 \qquad x\in M$$

于是 $f(x_n)=0$, 由 $x_n \xrightarrow{弱} x_0$, 有 $f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$, 这与 $f(x_0)=d>0$ 矛盾, 因此 $x_0\in M$.

注 4.5.1 例 4.5.4 说明: 对于线性子空间而言, 如果它包含了所有强收敛点列的极限, 则它也包含了所有弱收敛点列的极限.

4.5.2 算子序列的各种收敛性

定义 4.5.2(算子序列的收敛性) 设 $T_n\in B(X_1\to X_2)$, $T\in(X_1\to X_2)$,

(1) **一致收敛**: 如果 $\|T_n-T\|\to 0$, 则称 T_n 一致收敛于 T, 记为 $T_n\to T$;

(2) **强收敛**: 如果 $\forall\, x\in X_1$, $\|T_nx-Tx\|\to 0$, 则称 T_n 强收敛于 T, 记为 $T_n \xrightarrow{强} T$;

(3) **弱收敛**: 如果 $\forall\, x\in X_1$, $f\in X_2^*$, 使 $|f(T_nx)-f(Tx)|\to 0$, 则称 T_n 弱收敛于 T, 记为 $T_n \xrightarrow{弱} T$.

显然, 如果算子列 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T, 则 $\{T_n\}$ 必强收敛于 T; 如果 $\{T_n\}$ 强收敛于 T, 则 $\{T_n\}$ 必弱收敛于 T. 它们的逆命题一般不成立. 反例如下.

例 4.5.5(强收敛而不一致收敛) 在 $l^p(p\geqslant 1)$ 上, 作"左移"算子 T 如下: 当 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in l^p$ 时, 定义

$$Tx=(x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$$

$T: l^p\to l^p$ 是线性有界算子, 令 $T_n=T^n$, 则算子列 $\{T_n\}$ 强收敛于零. 实际上,

$$T_nx=T^nx=(x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots)$$

$$\|T_nx\|=\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}\to 0 \qquad n\to\infty$$

所以 $T_nx\to 0$, 即 T_n 强收敛于零.

取 $e_n=(0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$(第 n 个坐标为 1, 其余为 0), $n=1, 2, \cdots$

$$T_ne_{n+1}=T^ne_{n+1}=e_1,\ \|T_n\|\geqslant\frac{\|T_ne_{n+1}\|}{\|e_{n+1}\|}=1,\ T_n\to 0 \qquad n\to\infty$$

即 T_n 不一致收敛于零.

例 4.5.6(弱收敛而不强收敛) 在 l^2 上, 考虑由

$$T_nx=(\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n\text{个}0}, x_1, x_2, \cdots) \qquad \forall\, x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in l^2$$

定义的算子 $T_n: l^2\to l^2$. 算子 T_n 是线性有界算子.

取 $x_1=e_1=(1, 0, \cdots, 0, \cdots)$, 当 $m\neq n$ 时, 有

$$\|T_mx_1-T_nx_1\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

即 $\{T_nx_1\}$ 不收敛, 故 $\{T_n\}$ 不强收敛. 下面证明 $\{T_n\}$ 弱收敛于 θ

由 Riesz 表现定理知，对 l^2(可设为实空间)的线性有界泛函 f，$\exists z\in l^2$，$\forall x\in l^2$，有

$$f(x)=(x,z)=\sum_{i=1}^{\infty} z_i x_i$$

$z=(z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots)\in l^2$，由 T_n 定义可得

$$f(T_n x)=(T_n x, z)=\sum_{k=1}^{\infty} z_{n+k} x_k$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$|f(T_n x)|^2=|(T_n x, z)|^2=\left|\sum_{k=1}^{\infty} z_{n+k} x_k\right|^2$$

$$\leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} z_m^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\to 0 \qquad n\to\infty$$

因此，$\{T_n\}$弱收敛于零.

因为线性有界泛函是特殊的线性有界算子，因此定义 4.5.2 中的一致收敛、强收敛、弱收敛的概念对线性有界泛函列同样有效. 在这里 $X_2=\Lambda$，是有限维线性赋范空间，根据定理 4.5.2 可知，对泛函列的强收敛与弱收敛等价. 因此，对于泛函列只有对应于定义 4.5.2 中的一致收敛与强收敛，并分别把这两个概念叫做强收敛及弱*收敛.

定义 4.5.3(泛函列的强收敛与弱*收敛) 设 X 是线性赋范空间，$f_n\in X^*=B(X\to\Lambda)$，$n=1, 2, 3, \cdots$.

(1) **强收敛**：如果存在 $f\in X^*$，使得 $\|f_n-f\|\to 0$，则称 f_n 强收敛于 f，记为 $f_n\to f$；

(2) **弱*收敛**：如果存在 $f\in X^*$，使得对任何 $x\in X$ 都有 $f_n(x)\to f(x)$，则称 f_n 弱*收敛于 f，记为 $f_n\xrightarrow{\text{弱}^*} f$.

根据定理 4.3.3 的证明过程容易看到算子列的极限算子有以下的性质：

(1) 若 $T_n\in B(X_1\to X_2)$，$T_n\to T$(一致收敛)，则 $T\in B(X_1\to X_2)$；

(2) 若 $T_n\in B(X_1\to X_2)$，$T_n\xrightarrow{\text{强}} T$，且 X_2 是 Banach 空间，则 $T\in B(X_1\to X_2)$.

注 4.5.2 如果在性质(2)中去掉 X_2 是 Banach 空间的条件，就不能保证 $T\in B(X_1\to X_2)$.

对于强收敛的算子列，再应用共鸣定理可得下面定理.

定理 4.5.4 设 X_1 是 Banach 空间，X_2 是线性赋范空间，$T_n\in B(X_1\to X_2)$，若 $T_n\xrightarrow{\text{强}} T$，则$\{\|T_n\|\}$有界.

证 由于$\forall x\in X_1$，$\{T_n x\}$是收敛点列，故$\{T_n x\}$是 X_2 中的有界点列，由共鸣定理知，$\{T_n\}$一致有界，即$\exists M>0$，$\|T_n\|\leqslant M$，$n=1, 2, 3, \cdots$. □

4.6 共轭算子与自共轭算子

4.6.1 特例

为了更好地理解共轭算子，先看实欧氏空间的情况.

我们知道$(\mathbf{R}^m)^* = \mathbf{R}^m$，这就是说，$\forall f \in (\mathbf{R}^m)^*$，存在唯一的 $y \in \mathbf{R}^m$，使

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i \qquad \forall x \in \mathbf{R}^m \tag{4.6-1}$$

其中，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$，这样可以把 f 看作 y，即 $f = y$.

如果 $\mathbf{A}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的线性有界算子，则 $\mathbf{A}$ 可以用 $m \times n$ 矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$来表示，即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ 时，有

$$\mathbf{A}x = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \right) \in \mathbf{R}^m$$

$\forall f \in (\mathbf{R}^m)^*$ 及 $\forall x \in \mathbf{R}^n$，有

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}x) &= \sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \\ &= (\mathbf{A}^* y) x = (\mathbf{A}^* f) x \end{aligned} \tag{4.6-2}$$

其中 $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵，由(4.6.2)式可知，$\mathbf{A}^* f$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性有界泛函，这样 $\mathbf{A}^*$ 定义了$(\mathbf{R}^m)^*$ 到$(\mathbf{R}^n)^*$ 的一个线性有界算子，把它称为算子 $\mathbf{A}$ 的共轭算子. 在欧氏空间中，共轭算子对应的矩阵是转置矩阵. 下面把有限维空间中共轭算子的概念推广到抽象空间中去.

4.6.2 线性赋范空间中的共轭算子

设 X_1，X_2 是同数域 Λ 上的线性赋范空间，$T \in B(X_1 \to X_2)$，$\forall f \in X_2^*$，令

$$f^*(x) = f(Tx) \qquad \forall x \in X_1 \tag{4.6-3}$$

则 f^* 是 X_1 上的线性有界泛函. 事实上，$\forall x, y \in X_1$，$\alpha, \beta \in \Lambda$，有

$$\begin{aligned} f^*(\alpha x + \beta y) &= f[T(\alpha x + \beta y)] = f[\alpha Tx + \beta Ty] \\ &= \alpha f(Tx) + \beta f(Ty) = \alpha f^*(x) + \beta f^*(y) \end{aligned}$$

故 f^* 是 X_1 上的线性泛函. 又 $\forall f \in X_2^*$，$x \in X_1$，有

$$\begin{aligned} |f^*(x)| &\leqslant |f(Tx)| \leqslant \|f\| \|Tx\| \leqslant \|f\| \|T\| \|x\| \\ &= M\|x\| \end{aligned}$$

这里 $M = \|f\| \|T\|$，这就证明了 f^* 是 X_1 上的线性有界泛函，故 $f^* \in X_1^*$.

显然，对每一 $f \in X_2^*$，由(4.6-3)式有唯一的 $f^* \in X_1^*$ 与之对应，记这个对应关系为 T^*，即

$$T^* f = f^* \tag{4.6-4}$$

则 T^* 是 X_2^* 到 X_1^* 中的算子，如图 4-2 所示. 这里要指出：满足(4.6-4)式的算子 T^* 是唯一的. 实际上，如果有 T_1^* 满足 $T_1^* f = f^*$，则

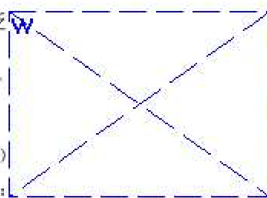


图 4-2

$$(T_1^* f)(x) = f(Tx) = (T^* f)(x) \qquad \forall x \in X_1, f \in X_2^*$$

则 $T_1^* f = T^* f$, $\forall f \in X_2^*$，即 $T_1^* = T^*$.

由(4.6-3)、(4.6-4)式可知对任何 $x \in X_1$，$f \in X_2^*$，有

$$(T^* f)(x) = f(Tx)$$

定义 4.6.1(共轭算子) 设 X_1，X_2 是同一数域 Λ 上的线性赋范空间，$T \in B(X_1 \to X_2)$，T^* 是 $X_2^* \to X_1^*$ 的算子，如果对任何 $x \in X_1$，$f \in X_2^*$，都有

$$(T^* f)(x) = f(Tx) \tag{4.6-5}$$

成立，就称 T^* 是 T 的共轭算子(也称伴随算子).

注 4.6.1 对 $f \in X^*$，$x \in X$，通常用记号(x, f)表示 f 在 x 点的值，以代替记号 $f(x)$. 记号(x, f)能较好地反映 X 与 X^* 之间的关系，即泛函 f 作用于 x 与把 $x \in X \subset X^{**}$ 看作 X^* 上的线性有界泛函作用于 f 的对偶关系，在这些记号下，(4.6-5)式可以写成

$$(x, T^* f) = (Tx, f) \tag{4.6-6}$$

下面给出共轭算子的性质.

定理 4.6.1(共轭算子的范数) 设 $T \in B(X_1 \to X_2)$，T^* 是 T 的共轭算子，则 T^* 是 $X_2^* \to X_1^*$ 的线性有界算子，且有

$$\| T^* \| = \| T \| \tag{4.6-7}$$

证 先证 T^* 是 $X_2^* \to X_1^*$ 中的线性算子. $\forall f_1, f_2 \in X_2^*$，$x \in X_1$，$\alpha, \beta \in \Lambda$，则

$$\begin{aligned} T^*(\alpha f_1 + \beta f_2)(x) &= (\alpha f_1 + \beta f_2)(Tx) \\ &= \alpha f_1(Tx) + \beta f_2(Tx) \\ &= \alpha(T^* f_1)(x) + \beta(T^* f_2)(x) \\ &= [\alpha(T^* f_1) + \beta(T^* f_2)](x) \end{aligned}$$

由于 $x \in X_1$ 任意，故有

$$T^*(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha(T^* f_1) + \beta(T^* f_2)$$

即 T^* 是线性算子.

其次证 T^* 有界. 由于 $\forall x \in X_1$，$f \in X_2^*$，有

$$\begin{aligned} |(T^* f)(x)| &= |f(Tx)| \leqslant \| f \| \| Tx \| \\ &\leqslant \| f \| \| T \| \| x \| \end{aligned}$$

故有 $\| T^* f \| \leqslant \| f \| \| T \|$，从而 $\| T^* \| \leqslant \| T \|$，即 T^* 是线性有界算子.

最后证(4.6-7)式. 这里只要证明 $\| T^* \| \geqslant \| T \|$，如果 $T = \theta$ 为零算子，则显然有 $\| T^* \| \geqslant 0 = \| T \|$. 设 $T \neq \theta$，如果 $Tx \neq 0$，则由 Hahn-Banach 定理，存在 $f_0 \in X_2^*$，$\| f_0 \| = 1$，$f_0(Tx) = \| Tx \|$，故有

$$\begin{aligned} \| Tx \| &= | f_0(Tx) | = | (T^* f_0)(x) | \\ &\leqslant \| T^* f_0 \| \| x \| \\ &\leqslant \| T^* \| \| f_0 \| \| x \| = \| T^* \| \| x \| \end{aligned} \tag{4.6-8}$$

当 $Tx = 0$ 时，(4.6-8)式显然成立. 故 $\forall x \in X_1$，(4.6-8)式均成立，即 $\| T \| \leqslant \| T^* \|$. 这就证明了等式(4.6-7). □

例 4.6.1 设 $K(s, t)$是矩形 $a \leqslant s, t \leqslant b$ 上的有界可测函数，令

$$Tx(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt \qquad \forall x\in L^q[a,b] \tag{4.6-9}$$

由本章例 4.3.5 知，T 是 $L^q[a,b]\to L^p[a,b]$ 的线性有界算子，求 T 的共轭算子 T^*.

解 $\forall f\in(L^p[a,b])^*=L^q[a,b]$，则存在唯一的 $\beta(s)\in L^q[a,b]$，使

$$f(Tx)=\int_a^b \beta(s)\left[\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt\right]ds$$

$$=\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t)\beta(s)\,ds\right]x(t)\,dt=(T^*f)(x)$$

$$T^*f=\int_a^b K(s,t)\beta(s)\,ds$$

如果令 $K^*(s,t)=K(t,s)$，则

$$T^*f=\int_a^b K(t,s)\beta(t)\,dt=\int_a^b K^*(s,t)\beta(t)\,dt$$

如果把 T 看作 $K(s,t)$，则 T^* 就是

$$K^*(s,t)=K(t,s) \tag{4.6-10}$$

关于共轭算子的运算性质有以下定理.

定理 4.6.2 设 X_1，X_2，X_3 是线性赋范空间，如果 T，$T_1\in B(X_1\to X_2)$，$T_2\in B(X_2\to X_3)$，那么

(1) $(\alpha T)^*=\alpha T^*$；

(2) $(T_2\cdot T_1)^*=T_1^*\cdot T_2^*$；

(3) $(T+T_1)^*=T^*+T_1^*$；

(4) 若 I：$X_1\to X_1$ 是恒等算子，则 I^* 是 $X_1^*\to X_1^*$ 的恒等算子.

证 (1) $\forall f\in X_2^*$，$\forall x\in X_1$，都有

$$[(\alpha T)^*f](x)=f(\alpha Tx)=\alpha f(Tx)=[\alpha T^*f](x)$$

所以
$$(\alpha T)^*=\alpha T^*$$

(2) $\forall g\in X_3^*$，$\forall x\in X_1$，有

$$[(T_2\cdot T_1)^*g](x)=g(T_2\cdot T_1x)=g[T_2\cdot(T_1x)]=(T_2^*g)(T_1x)$$

$$=T_1^*(T_2^*g)(x)=[(T_1^*\cdot T_2^*)g](x)$$

所以
$$(T_2\cdot T_1)^*=T_1^*\cdot T_2^*$$

(3) $\forall f\in X_2^*$，$x\in X_1$，有

$$[(T+T_1)^*f](x)=f[(T+T_1)(x)]=f(Tx)+f(T_1x)$$

$$=T^*f(x)+T_1^*f(x)=[(T^*+T_1^*)f](x)$$

所以
$$(T+T_1)^*=T^*+T_1^*$$

(4) $\forall f\in X_1^*$，$x\in X_1$，有

$$I^*f(x)=f(Ix)=f(x)$$

所以 $I^*f=f$，即 I^* 是 $X_1^*\to X_1^*$ 的恒等算子. □

最后，我们讨论算子 T 与其共轭算子 T^* 的零空间和值域之间的关系(这段内容比较深入，初学者可以跳过). 在这里，先引入**共线**与**广义直交**的概念.

$\forall x\in X$，$f\in X^*$，总有$(x,f)=f(x)\leqslant\|f\|\|x\|$. 在希尔伯特空间中，上式等号成

立的充要条件是 $f=\lambda x$，λ 是某一非负实数，这表示 f 与 x 是共线的，因此，可类比给出如下的定义.

定义 4.6.2(共线) 设 $x\in X$，$f\in X^*$，若 $(x, f)=\|f\|\|x\|$，则称向量 $f\in X^*$ 与向量 $x\in X$ **共线**. 这里 $(x, f)=f(x)$.

这里要注意，这种共线关系并不是同一空间中的向量平行，而是指 X 中的向量 x 与其共轭空间 X^* 中的向量 f 之间的一种关系，它反映了 f 在单位向量 $\tilde{x}=\dfrac{x}{\|x\|}$ 取最大值 $\|f\|$.

定义 4.6.3(广义直交) 设 $x\in X$，$f\in X^*$，如果 $(x, f)=0$，则称 x 与 f **广义直交，也简称 x 与 f 直交.**

由于希尔伯特空间是自共轭的，即 $H^*=H$，因此，广义直交概念是希尔伯特空间直交概念的推广.

定义 4.6.4(直交补) 设 $M\subset X$，$N\subset X^*$，M 与 N 的**直交补**分别定义为

$$M^{\perp}=\{f\in X^* \mid (x, f)=0,\ \forall x\in M\}$$

$$^{\perp}N=\{x\in X\mid (x, f)=0,\ \forall f\in N\}$$

容易证明：$M^{\perp}$ 是 X^* 的线性子空间，$^{\perp}N$ 是 X 的线性子空间. $\forall f\in N\subset X^*$，$f$ 的**零空间** $N(f)=\{x\in X\mid (x, f)=0\}$ 是 X 的闭子空间，从而 $^{\perp}N=\bigcap\{N(f)\mid f\in N\}$ 是 X 的闭线性子空间.

下面定理给出 T^* 的零空间与 T 的值域之间的关系，如图 4-3 所示.

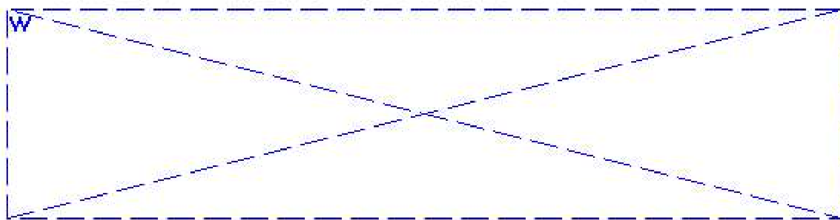


图 4-3

定理 4.6.3 设 X_1，X_2 都是 Banach 空间，$T\in B(X_1\to X_2)$，则有

(1) $$N(T^*)=R(T)^{\perp} \tag{4.6-11}$$

(2) $$N(T)={}^{\perp}R(T^*) \tag{4.6-12}$$

证* (1) $\forall f\in N(T^*)\Longleftrightarrow T^*f=0\Longleftrightarrow \forall x\in X_1$，$(x, T^*f)=0\Longleftrightarrow \forall x\in X_1$，$(Tx, f)=0\Longleftrightarrow f\in R(T)^{\perp}$.

(2) $\forall x\in N(T)\Longleftrightarrow Tx=0\Longleftrightarrow \forall f\in X_2^*$，$(Tx, f)=0\Longleftrightarrow \forall f\in X_2^*$，$(x, T^*f)=0$ $\Longleftrightarrow x\in{}^{\perp}R(T^*)$. □

在某些简单的附加条件下，可以得到定理 4.6.3 的对偶定理.

定理 4.6.4 设 X_1，X_2 是同数域 Λ 上的两个线性赋范空间，$T\in B(X_1\to X_2)$，则

$$\overline{R(T)}={}^{\perp}N(T^*) \tag{4.6-13}$$

证 先证 $\overline{R(T)}\subset{}^{\perp}N(T^*)$. 由于 $^{\perp}N(T^*)$ 是 X_2 的闭子空间，故只要证明：$R(T)\subset{}^{\perp}N(T^*)$. $\forall y\in R(T)$，则 $\exists x\in X_1$，使 $y=Tx$，对任何 $f\in N(T^*)$，则有

$$(y, f) = (Tx, f) = (x, T^* f) = (x, \theta) = 0$$

因此 $y \in {}^{\perp}N(T^*)$.

再证：$\overline{R(T)} \supset {}^{\perp}N(T^*)$. 如果 $\overline{R(T)} = X_2$，则结论自然成立. 若 $\overline{R(T)} \neq X_2$，我们证：若 $y \notin \overline{R(T)}$，则 $y \notin {}^{\perp}N(T^*)$. 根据 Hahn-Banach 定理(推论 4.2.2)，$\forall y \notin \overline{R(T)}$，则 $\exists f \in X_2^*$，使

$$(y, f) = f(y) \neq 0$$

$$(Tx, f) = f(Tx) = 0 \qquad \forall x \in X_1$$

于是$(x, T^* f) = (Tx, f) = 0$，$\forall x \in X_1$，由 $x \in X_1$ 任意可知，$T^* f = 0$，故 $f \in N(T^*)$，但$(y, f) \neq 0$，因此 $y \notin {}^{\perp}N(T^*)$，即(4.6-13)式成立. □

定理 4.6.5(值域定理) 设 X_1，X_2 是数域 Λ 上的 Banach 空间，$T \in B(X_1 \to X_2)$，且 T 的值域 $R(T)$ 在 X_2 中闭，则

$$R(T^*) = N(T)^{\perp} \tag{4.6-14}$$

证 先证 $R(T^*) \subset N(T)^{\perp}$，$\forall f^* \in R(T^*) \subset X_1^*$，则 $\exists f \in X_2^*$，使得 $f^* = T^* f$. $\forall x \in N(T)$，则有

$$(x, f^*) = (x, T^* f) = (Tx, f) = (\theta, f) = 0$$

故 $f^* \in N(T)^{\perp}$，即

$$R(T^*) \subset N(T)^{\perp} \tag{4.6-15}$$

再证 $R(T^*) \supset N(T)^{\perp}$. 任取 $f^* \in N(T)^{\perp}$，作 $R(T)$ 上的线性泛函 f_0，当 $y = Tx$ 时，定义为

$$f_0(y) = f(Tx) = f^*(x) \tag{4.6-16}$$

则 $f_0(y)$ 的值是唯一确定的. 实际上，当 $y = 0$ 时，因 $y = Tx$，故 $Tx = 0$ 即 $x \in N(T)$，而 $f^* \in N(T)^{\perp}$，所以 $f^*(x) = 0$. 这就是说，$f_0(y) = 0$，即 $f_0(y)$ 在 $y = 0$ 的值是唯一确定的，故在任何点 y 处的值也唯一确定.

因为 $\forall y \in R(T)$，有

$$|f_0(y)| = |f^*(x)| \leqslant \|f^*\| \|x\| \tag{4.6-17}$$

如果能够证明：$\exists M > 0$，$\forall x \in X_1$，使 $Tx = y$，有 $\|x\| \leqslant M\|y\|$，则由(4.6-17)式可知 f_0 是 $R(T)$ 上的线性有界泛函. 应该注意 $R(T)$ 是 X_2 中的闭集，故 $R(T)$ 是 Banach 空间，由开映象定理可知，$\exists \delta > 0$，使

$$TB \supset \{ y \in X_2 \mid \|y\| < \delta \}$$

其中 $B = \{ x \in X_1 \mid \|x\| \leqslant 1 \}$ 是 X_1 中的单位球. 也就是说，$\exists \delta > 0$，当 $y_0 \in R(T)$，$\|y_0\| < \delta$ 时，$\exists x_0 \in X$，$\|x_0\| < 1$，有 $y_0 = Tx_0$.

$\forall y \in R(T)$，取 $y_0 = \dfrac{\delta}{2} \dfrac{y}{\|y\|}$ $(y \neq 0)$，则 $\exists x_0 \in X$，$\|x_0\| < 1$，使得 $Tx_0 = y_0 = \dfrac{\delta}{2} \dfrac{y}{\|y\|}$ 或 $y = T\left(\dfrac{2}{\delta}\|y\| x_0\right)$，令 $x = \dfrac{2}{\delta}\|y\| x_0$，即得 $Tx = y$，并且有

$$\|x\| = \frac{2}{\delta}\|y\| \|x_0\| < \frac{2}{\delta}\|y\|$$

令 $M = \dfrac{2}{\delta}$，结合(4.6-17)式可得

$$|f_0(y)| \leqslant \|f^*\| \|x\| \leqslant \|f^*\| M \|y\|$$

这就证明了 f_0 在 $R(T)$上有界. 即 f_0 是 $R(T)$上的线性连续泛函. 根据 Hahn－Banach 定理，可将 f_0 延拓到全空间 X_2 上去，用 f 表示 f_0 延拓后的泛函，则 $f \in X_2^*$，且满足：$\forall x \in X_1$，有

$$f(Tx) = f^*(x)$$

由共轭算子定义，$\forall x \in X_1$，有

$$(Tx, f) = (x, T^* f)$$

即 $f^* = T^* f$，这就证明 $f^* \in R(T^*)$. 于是有

$$N(T)^{\perp} \subset R(T^*) \tag{4.6-18}$$

由(4.6－15)、(4.6－18)式可知，$N(T)^{\perp} = R(T^*)$，即(4.6－14)式成立. □

注 4.6.2 等式(4.6－13)、(4.6－14)刻画了抽象空间中线性算子方程

$$Ax = y$$

有解的条件. 例如，线性方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4.6-19}$$

简记为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times n}$，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$.

我们知道，当 $\det \boldsymbol{A} = 0$ 时，方程组(4.6－19)有解的充分必要条件是 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$ 与共轭齐次方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一切解正交，即方程组(4.6－19)有解 $\Longleftrightarrow R(\boldsymbol{A}) = {}^{\perp}N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$. 这里 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即公式(4.6－13)成立.

关于定理 4.6.4，在变分原理、优化理论、线性积分方程理论中都有应用.

4.6.3 希尔伯特空间中的自共轭算子

设 H 是希尔伯特空间，$T \in B(H \to H)$，对于给定的 $z \in H$，则 (Tx, z) 定义了 H 上关于 x 的线性有界泛函，由 Riesz 表现定理知，存在唯一的 $z^* \in H$，使

$$(Tx, z) = (x, z^*) \qquad \forall x \in H \tag{4.6-20}$$

由(4.6－20)式可得到 H 到 H 的映射 T^*：$H \to H$，$T^* z = z^*$，T^* 是 $H \to H$ 的线性有界算子，且有 $\|T^*\| = \|T\|$（证明同定理 4.6.1），这样(4.6.20)式变为

$$(Tx, z) = (x, T^* z) \tag{4.6-21}$$

定义 4.6.5 设 H 是希尔伯特空间，$T \in B(H \to H)$，$T^* \in B(H^* \to H^*) = B(H \to H)$，如果对任何 $x, z \in H$，(4.6－21)式均成立，则称算子 T^* 是 T 的共轭算子.

由于 H 是特殊的 Banach 空间，且 $H^* = H$（在共轭线性同构的意义下），则希尔伯特空间 H 中的共轭算子有类似于定理 4.6.2 的运算性质.

定理 4.6.6（共轭算子的性质） 设 H 是希尔伯特空间 $T, T_1, T_2 \in B(H \to H)$，则有

(1) $(T^*)^* = T$；

(2) $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \bar{\alpha} T_1^* + \bar{\beta} T_2^*$；

(3) $(T_1 \cdot T_2)^* = T_2^* \cdot T_1^*$；

(4) T正则$\Longleftrightarrow T^*$正则，且$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$；

(5) 如果 λ是 T 的特征值，x是对应的特征向量，μ是 T^* 的特征值，y是对应的特征向量，且 $\lambda\neq\bar{\mu}$，则 $x\perp y$.

证 仅证结论(4)、(5)，其余留给读者.

(4) 如果 T正则，则 $T^{-1}\in B(H\to H)$，使 $TT^{-1}=I$，由(3)的结论有

$$(T^{-1})^*T^*=(TT^{-1})^*=I^*=I$$

所以$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*\in B(H\to H)$，即 T^*正则.

(5)
$$\begin{aligned}\lambda(x,y)&=(\lambda x,y)=(Tx,y)=(x,T^*y)\\&=(x,\mu y)=\bar{\mu}(x,y)\\&(\lambda-\bar{\mu})(x,y)=0\end{aligned}$$

当 $\lambda\neq\bar{\mu}$时，有$(x,y)=0$，即 $x\perp y$. □

定义 4.6.6(自共轭算子) 设 H是希尔伯特空间，$T\in B(H\to H)$，如果 $T^*=T$，即

$$(Tx,y)=(x,Ty) \tag{4.6-22}$$

称 T是**自共轭算子**(或 **Hermite 算子**).

例 4.6.2 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$a_{ji}=\bar{a}_{ij}$，$i,j=1,2,\cdots,n$，令

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax}&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)(a_{ij})_{n\times n}\\&=\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}x_i,\sum_{i=1}^n a_{i2}x_i,\cdots,\sum_{i=1}^n a_{in}x_i\right)\end{aligned}$$

则 A是复希尔伯特空间 $C^n\to C^n$ 的自共轭算子.

证 事实上，$\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，

$$\begin{aligned}(\mathbf{Ax},\mathbf{y})&=\sum_{j=1}^n(\mathbf{Ax})_j\bar{y}_j=\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n x_ia_{ij}\right)\bar{y}_j\\&=\sum_{i=1}^n x_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{y}_j\right)=\sum_{i=1}^n x_i\left(\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ji}\bar{y}_j\right)=\sum_{i=1}^n x_i(\overline{\mathbf{Ay}})_i\\&=(\boldsymbol{x},\mathbf{Ay})\end{aligned}$$

所以 $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}$.

例 4.6.3 设 $K(s,t)=\overline{K(t,s)}$，$\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}s<+\infty$

$$Tx(s)=\int_a^bK(s,t)x(t)\mathrm{d}t \tag{4.6-23}$$

则 T是希尔伯特空间 $L^2[a,b]$到 $L^2[a,b]$的自共轭算子.

证 $\forall\ x,y\in L^2[a,b]$，

$$\begin{aligned}(Tx,y)&=\int_a^b\int_a^bK(s,t)x(t)\mathrm{d}t\cdot\bar{y}(s)\mathrm{d}s\\&=\int_a^bx(t)\mathrm{d}t\overline{\int_a^bK(t,s)y(s)\mathrm{d}s}=(x,Ty)\end{aligned}$$

所以 $T^*=T$，即 T是自共轭算子.

例 4.6.4 作为例 4.6.3 的特殊情况，考虑 $L^2[0,1]$的 Volterra 积分算子：

$$Tx(s)=\int_0^sx(t)\mathrm{d}t$$

则
$$T^* x(s) = \int_s^1 x(t)\,\mathrm{d}t$$

证 事实上，Volterra 积分算子核为

$$K(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{当 } 0 \leqslant s \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant s \\ 0 & \text{当 } 0 \leqslant s \leqslant 1,\ s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

由例 4.6.3，T的共轭算子 T^* 的核为

$$K^*(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{当 } 0 \leqslant s \leqslant 1,\ s \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{当 } 0 \leqslant s \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant s \end{cases}$$

故
$$T^* x(s) = \int_s^1 x(t)\,\mathrm{d}t$$

下面介绍自共轭算子的判别条件.

定理 4.6.7(充要条件) 设 H是复的希尔伯特空间，则 T是 $H\to H$的自共轭算子 $\Longleftrightarrow \forall\, x\in H$，$(Tx, x)$为实数.

证 $\Rightarrow$ 若 T：$H\to H$是自共轭算子，则$\forall\, x\in H$，有

$$(Tx, x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)}$$

即(Tx, x)是实数.

$\Leftarrow$ 设对任意 $x\in H$，(Tx, x)为实数，则

$$(Tx, x) = (x, Tx)$$

直接验算，有

$$(Tx, y) = \frac{1}{4}[(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y)] + \frac{\mathrm{i}}{4}[(T(x+\mathrm{i}y), x+\mathrm{i}y) - (T(x-\mathrm{i}y), x-\mathrm{i}y)]$$

再由$(T(x+y), x+y)=(x+y, T(x+y))$，得

$$\begin{aligned}(x, T^* y) = (Tx, y) &= \frac{1}{4}[(x+y, T(x+y)) - (x-y, T(x-y))] \\ &\quad + \frac{\mathrm{i}}{4}[(x+\mathrm{i}y, T(x+\mathrm{i}y)) - (x-\mathrm{i}y, T(x-\mathrm{i}y))] \\ &= (x, Ty)\end{aligned}$$

所以 $T^* = T$，即 T是自共轭算子. □

注 4.6.3 定理 4.6.7 只是在复希尔伯特空间时成立，当 H是实的希尔伯特空间时，结论未必成立. 例如，$\mathbf{R}^n$(实空间)，$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，非对称，则 $\mathbf{A}$不是自共轭的，但对任 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$为实数.

定理 4.6.8 设 H是复的希尔伯特空间，$T\in B(H\to H)$，若 T是自共轭算子，且 T有特征值存在，则 T的特征值都是实数.

证 设 λ是 T的特征值，x_λ 是其特征向量，则 $Tx_\lambda=\lambda x_\lambda$，$x_\lambda\neq 0$，于是

$$(Tx_\lambda, x_\lambda) = \lambda(x_\lambda, x_\lambda)$$

$$\lambda = \frac{(Tx_\lambda, x_\lambda)}{(x_\lambda, x_\lambda)} = \frac{(Tx_\lambda, x_\lambda)}{\|x_\lambda\|^2}$$

由定理 4.6.5 知(Tx_λ, x_λ)是实数，故 λ是实数. □

推论 4.6.1 自共轭算子的不同特征值对应的特征向量相互正交.

证 设 T 有不同的特征值 λ、μ，它们对应的特征向量分别为 x, y，再由于 $T^* = T$，故可把 μ 看作 T^* 的特征值. 由定理4.6.6的结果(5)，可知当 $\lambda \neq \mu(\lambda \neq \bar{\mu})$ 时，$x \perp y$. □

推论 4.6.2 设 $T \in B(H \to H)$，T 是自共轭算子，则

$$N(T) = R(T)^{\perp} \tag{4.6-24}$$

证 当 H 是希尔伯特空间时，$H^* = H$，再由于 $T^* = T$，应用定理4.6.3的公式(4.6-11)便得(4.6-24)式. □

例 4.6.5 在 $L^2[0,1]$(这里 $L^2[0,1]$ 看作复的希尔伯特空间)中定义乘法算子

$$Tx(t) = tx(t) \qquad x(t) \in L^2[0,1]$$

显见 T 是 $L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ 的线性有界算子. 由于

$$(Tx, x) = \int_0^1 t\,|x(t)|^2 \,\mathrm{d}t \qquad \forall\, x(t) \in L^2[0,1]$$

是实数，由定理4.6.5可知，算子 T 是自共轭算子.

有关常微分及偏微分的自共轭算子的例子可参阅文献[9].

定理 4.6.9 设$\{T_n\}$是复希尔伯特空间 H 的一列自共轭算子，而且 T: $H \to H$，满足

$$\lim_{n\to\infty}(T_n x, y) = (Tx, y) \qquad \forall\, x, y \in H$$

则 T 也是自共轭算子.

证 先证 $T \in B(H \to H)$. 由内积的连续性，$\forall\, x_1, x_2, y \in H$, $\alpha, \beta \in \Lambda$，有

$$\begin{aligned}(T(\alpha x_1 + \beta x_2), y) &= \lim_{n\to\infty}(T_n(\alpha x_1 + \beta x_2), y) \\ &= \lim_{n\to\infty}(\alpha T_n x_1, y) + \lim_{n\to\infty}(\beta T_n x_2, y) \\ &= (\alpha T x_1, y) + (\beta T x_2, y) = (\alpha T x_1 + \beta T x_2, y)\end{aligned}$$

所以

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2$$

即 T 是线性算子.

由条件，若取定 $x \in H$，则

$$\lim_{n\to\infty}(T_n x, y) = (Tx, y) \qquad y \in H$$

由 Riesz 定理可知，$\{T_n x\}$弱收敛于 Tx，由共鸣定理得$\{\|T_n x\|\}$是有界集. 再次应用共鸣定理，知$\{\|T_n\|\}$有界，则 $\exists\, M>0$，有

$$\|T_n\| \leqslant M \qquad n = 1, 2, \cdots$$

于是

$$|(Tx, y)| = \lim_{n\to\infty}|(T_n x, y)| \leqslant M\|x\|\,\|y\|$$

取 $y = Tx$，得 $\|Tx\|^2 \leqslant M\|x\|\,\|Tx\|$，即有 $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$，即 $T \in B(H \to H)$.

再证 T 是自共轭算子. 由于对任何 $x \in H$，$(T_n x, x)$ 是实数，因此

$$(Tx, x) = \lim_{n\to\infty}(T_n x, x)$$

也是实数，根据定理4.6.7知 T 是自共轭的. □

最后，我们介绍希尔伯特空间内一类很特殊并且很重要的有界自共轭算子，称为**正交投影算子**.

设 $M \subset H$ 是 H 的闭子空间，由投影定理：对 $x \in H$，x 可唯一地表示为 $x = x_0 + z$，$x_0 \in M$, $z \in M^{\perp}$.

定义 4.6.7 算子 P: $H \to M$，定义为 $\forall\, x \in H$，$Px = x_0 \in M$ 称算子 P 为 H 到 M 的**正**

交投影算子.

由定义可以看出，P有以下的性质：

(1) $\|P\|=1$ 或 $\|P\|=0$；

(2) $P^2=P$(等幂性)；

(3) $N(P)=M^{\perp}$.

仅证性质(1)，性质(2)、(3)请读者自己完成.

如果 $M=\{0\}$，显然有 $\|P\|=0$；如果 $M\neq\{0\}$，那么由 $\|Px\|^2=\|x_0\|^2\leqslant\|x_0\|^2+\|z\|^2=\|x_0+z\|^2=\|x\|^2$ 知 $\|P\|\leqslant 1$，但对 $x\in M$，由 $\|Px\|=\|x\|$ 知 $\|P\|\geqslant 1$，故 $\|P\|=1$.

定理 4.6.10(充要条件) 设 H是希尔伯特空间，则 $P\in B(H\to H)$是正交投影算子$\Longleftrightarrow$以下的条件成立.

(1) P是自共轭算子；

(2) P是等幂的.

证 $\Rightarrow$ 设 $P\in B(H\to H)$是正交投影算子，任取 $x, y\in H$，它们对 M的直交分解分别为

$$x=x_0+x',\ y=y_0+y' \qquad x_0, y_0\in M;\ x', y'\in M^{\perp}$$

$$(Px, y)=(x_0, y_0+y')=(x_0, y_0)$$

$$(x, Py)=(x_0+x', y_0)=(x_0, y_0)$$

从而有$(Px, y)=(x, Py)$，即 P是自共轭的. 由投影算子的性质(2)知 P是等幂的.

$\Leftarrow$ 设 P满足条件(1)、(2)，记 $R(P)=M$，M是 H的线性子空间. 可证：任何 $x\in H$在 M上必有正交投影. 事实上，任取 $x, y\in H$，则

$$(x-Px, Py)=(Px-P^2x, y)=0$$

当 y取遍 H时，Py取遍 M的元，故上式表明 $x-Px\perp M$，记 $Px=x_0$，$x-Px=x-x_0=x'$，则 $x=x_0+x'$，$x'\perp M$. 这就证明了 H内任一元 x在 M上存在正交投影 x_0. 由 $P\in B(H\to H)$，则 $M=R(P)$是 H的闭集，即 M是 H的闭子空间，从而 P是 $H\to M$的正交投影算子. □

习 题 四

1. 在 $C[a, b]$上定义泛函. $\forall x(t)\in C[a, b]$，$y_0(t)$在$[a, b]$上连续，证明：

$$f(x)=\int_a^b x(t)y_0(t)\,\mathrm{d}t$$

和

$$g(x)=\alpha x(a)+\beta x(b)$$

是线性的和有界的.

2. 证明通过 $f(x)=x_n$(n是固定的)，$x=(x_j)\in l^{\infty}$，定义 l^{∞}上一线性泛函，问 f有界吗？

3. 在 $\mathbf{R}^2$ 中引入范数

$$\|\boldsymbol{x}\|=|x_1|+|x_2| \qquad \boldsymbol{x}=(x_1, x_2)\in\mathbf{R}^2$$

构成线性赋范空间，在 $\mathbf{R}^2$ 上定义泛函 f：

$$f(\boldsymbol{x}) = \alpha x_1 + \beta x_2 \qquad \forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

试求 $\|f\|$.

4. 设 $C^1[a, b]$是 $J=[a, b]$上连续可微函数全体构成的线性赋范空间，其范数为

$$\|\boldsymbol{x}\| = \max_{t\in J} |x(t)| + \max_{t\in J} |x'(t)|$$

证明此范数满足范数公理，令

$$f(x) = x'(c)$$

其中，$c=(a+b)/2$. 证明 f是 $C^1[a, b]$上的线性有界泛函. 如果将 f看成 $C[a, b]$中所有连续可微函数组成的子空间上的泛函，证明 f是无界的.

5. $\forall\, x\in C[a, b]$，定义

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x(t_j)$$

$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，$(a_0, a_1, \cdots, a_n)\in\mathbf{R}^{n+1}$. 求证：$f$是 $C[a, b]$上的线性有界泛函，且有 $\|f\| = \sum_{j=0}^{n} |a_j|$.

6. 设 U是内积空间，z为 U中一固定元素，证明 $f(x)=(x, z)$定义了 U上一线性有界泛函 f，其范数为 $\|z\|$.

7. 设 X_1，X_2 是线性赋范空间，积空间 $X_1\times X_2$ 取范数 $\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|$，试证明：

$$(X_1\times X_2)^* = X_1^* \times X_2^*$$

这里 $X_1^*\times X_2^*$ 上的范数定义为 $\|(f_1, f_2)\| = \max(\|f_1\|, \|f_2\|)$.

8. 设 $f\neq\theta$是向量空间 X上的任意线性泛函，$x_0\in X-N(f)$是任意固定的元素，证明：$\forall\, x\in X$，有唯一的表达式

$$x = \alpha x_0 + y \qquad y\in N(f)$$

其中 $N(f)=\{x\,|\,f(x)=0, x\in N\}$.

9. 如果 X是由 n个实数的有序组构成的线性赋范空间，其范数为 $\|\boldsymbol{x}\| = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\xi_j|$，这里，$\boldsymbol{x}=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，问其共轭空间 X^*上相应的范数是什么？

10. 设 X是线性赋范空间，若 $X\neq\{0\}$，则其共轭空间 $X^*\neq\{0\}$.

11. 设 X是线性赋范空间，x_0 是 X中任一非零元素，证明存在$\tilde{f}\in X^*$，使得$\tilde{f}(x_0)=1$，$\|\tilde{f}\| = \dfrac{1}{\|x_0\|}$.

12. 设 X是线性赋范空间，证明对每个 $x\in X$，都有

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in X^*\\ f\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

13. 设 $X=\mathbf{R}^2$，试求出推论 4.2.1 中的泛函 f_0.

14. 设 X是线性赋范空间，Y是 X的闭线性子空间，而且对 $f\in X^*$，当 $f|_Y=0$ 时，必有 $f=0$. 试证明：$X=Y$，其中 $f|_Y$ 是 f在 Y上的限制.

15. 设 $T\in(X\to Y)$，证明：如果 T有界，则 $N(T)=\{x\,|\,Tx=0, x\in X\}$是闭集. 请问：

反之如何？

16. 证明：通过 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\to \boldsymbol{y}=(x_1/1, x_2/2, \cdots, x_n/n, \cdots)$定义的算子 $T: l^\infty \to l^\infty$ 是线性有界的，并求 $\|T\|$.

17. 在 $\mathbf{R}^n$ 中，定义 $\|x\|=\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|$，求出由矩阵$(a_{ij})_{n\times n}$所定义的线性算子 A 的范数 $\|A\|$.

18. 在 $C[0, 1]$上分别由

$$T_1 x = y(s) = s\int_0^1 x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$T_2 x = y(s) = sx(s)$$

定义算子 T_1 和 T_2，T_1 与 T_2 可以交换吗？求 $\|T_1\|$、$\|T_2\|$、$\|T_1T_2\|$、$\|T_2T_1\|$.

19. 设 X_1，X_2 是线性赋范空间，$T_n: X_1\to X_2\ (n=1, 2, 3, \cdots)$是线性有界算子. 证明：如果 $T_n\to T$，则对任何给定闭球中的一切 x，存在 N，当 $n>N$ 时，有 $\|T_nx-Tx\|<\varepsilon$

20. 设 X_1，X_2 是Banach 空间，$T: D(T)\to X_2$ 是线性算子. $D(T)\subset X_1$，值域 $R(T)\subset X_2$. 证明：逆算子 $T^{-1}: R(T)\to D(T)$存在$\Longleftrightarrow$由 $Tx=0$ 可推得 $x=0$.

21. 设 X_1，X_2 是线性赋范空间，$T\in B(X_1\to X_2)$，且 $TX_1=X_2$. 如果存在 $b>0$，使得 $\|Tx\|\geqslant b\|x\|\ (\forall x\in X_1)$，试证明：逆算子 T^{-1}存在且有界.

22. 设(a_{ij})是无穷矩阵，满足

$$\sum_{j=1}^{\infty}(a_{ij})^2<\infty \qquad i=1, 2, 3, \cdots$$

设 $T: l^2\to l^2$ 定义为：$\boldsymbol{x}\to T\boldsymbol{x}$，其中 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in l^2$，$T\boldsymbol{x}=(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)$，$y_i=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j$，$i=1, 2, 3, \cdots$，试证明：$T$为线性有界算子.

23. 设 $C[0, 1]$按范数 $\|\cdot\|_1$ 为 Banach 空间，且 $\|x_n-x\|_1\to 0$ 时，对一切 $t\in[0, 1]$，$|x_n(t)-x(t)|\to 0$. 试证明：$\|\cdot\|_1$ 必与范数 $\|x\|=\max\limits_{t\in[0, 1]}|x(t)|$等价.

24. 设 X_1，X_2 是线性赋范空间，$T\in B(X_1\to X_2)$，$\{x_n\}\subset X_1$. 若 $x_n\xrightarrow{弱}x_0$，试证明：$Tx_n\xrightarrow{弱}Tx_0$.

25. 设 X是线性赋范空间，$\{x_n\}\subset X$，若 $x_n\xrightarrow{弱}x$，则 x唯一.

26. 设 X是线性赋范空间，$\{x_n\}\subset X$，设 $x_n\xrightarrow{弱}x$，证明$\{\|x_n\|\}$有界.

27. 设 X_1，X_2 是线性赋范空间，$T_n\in B(X_1\to X_2)$，$n=1, 2, 3, \cdots$. 证明：$T_n\to T\ (n\to\infty)\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N$（只依赖于 ε），使得对于所有范数等于1 的 $x\in X_1$，当 $n>N$ 时，总有 $\|T_nx-Tx\|<\varepsilon$

28. 设$\{a_n\}$是一实数列，若对于任何 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in l^2$，都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$收敛，证明$\{a_n\}\in l^2$.

29. 设从线性赋范空间 X_1 到 X_2 的线性算子 T定义如下：

$$Tx=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)z_i \qquad x\in X_1$$

其中，$f_i \in X_1^*$，$z \in X_2$，$i=1, 2, \cdots, n$，试证明

$$T^* g = \sum_{i=1}^{n} g(z) f_i \qquad g \in X_2^*$$

30. 设 H 是希尔伯特空间，T 为 H 上的线性有界算子，$\| T\| \leqslant 1$，试证明：

$$\{ x \mid Tx = x\} = \{ x \mid T^* x = x\}$$

第五章　不动点定理与最佳逼近

许多代数方程、微分方程和积分方程的求解问题可以转化为求某映射的不动点．本章内容包含两个方面：其一是完备距离中的Banach不动点定理及其在方程求解方面的应用，其二是介绍Banach空间中的Schauder不动点定理及其应用．

5.1　压缩映射原理

5.1.1　巴拿赫不动点定理及其推论

设X是一距离空间，$f: X\to X$是一算子，则$\forall x\in X$，有唯一的$y\in X$，使$y=f(x)$．若给定$y_0\in X$，则方程

$$f(x)=y_0 \qquad (5.1-1)$$

称为算子方程．求解算子方程(5.1-1)是指：找出x_0，使$f(x_0)=y_0$．通常可以把求解算子方程转化为求算子的不动点．为此，可以把方程(5.1-1)变为等价的算子方程

$$x=f(x)-y_0+x \qquad (5.1-2)$$

记$A(x)=f(x)-y_0+x$，则方程为$x=A(x)$，这里A是一个新的算子．求解算子方程(5.1-1)等价于求出x_0，使得

$$x_0=A(x_0) \qquad (5.1-3)$$

此时x_0称为算子A的一个不动点，即求解算子方程(5.1-1)等价于求算子A的不动点．

首先介绍不动点和压缩映射的概念．

定义5.1.1(不动点)　设X是集合，$A: X\to X$为一映射，如果$x_0\in X$，满足$A(x_0)=x_0$，则称x_0为映射A的一个**不动点**．

定义5.1.2(压缩映射)　设(X, d)是一距离空间，$A: X\to X$，如果对任何$x, y\in X$，有

$$d(Ax, Ay)\leqslant \alpha d(x, y) \qquad (5.1-4)$$

这里$\alpha\in(0, 1)$是一常数，称A是X上的一个**压缩映射**．

距离空间中的一个点集S经过压缩映射A作用后所得到的象集$A(S)$中，两点之间的距离缩短了，至多是原象距离的α倍．因此，**压缩映射是连续映射**，即$\forall x_n\in X$，$x_0\in X$，$x_n\to x_0$，则有$Ax_n\to Ax_0$．事实上，由

$$0\leqslant d(Ax_n, Ax_0)\leqslant \alpha d(x_n, x_0)\to 0 \qquad n\to\infty$$

便知A在x_0点连续．

下面给出压缩映射原理．该定理由*Banach*于1922年给出，也称为*Banach*不动点定理．

定理 5.1.1(Banach 不动点定理) 设 X 是完备的距离空间，A：$X\to X$ 是压缩映射，则 A 在 X 中具有唯一的不动点，即存在唯一的 x^*，使 $x^*=A(x^*)$.

证 $\forall x_1\in X$，作 X 中的点列$\{x_n\}$如下：

$$x_2=A(x_1),\ x_3=A(x_2),\ \cdots,\ x_n=A(x_{n-1}),\ \cdots$$

(1) 首先证明$\{x_n\}$是 X 中的基本列，由(5.1-4)式，有

$$d(x_2,x_3)=d(Ax_1,Ax_2)\leqslant \alpha d(x_1,x_2)$$

$$d(x_3,x_4)=d(Ax_2,Ax_3)\leqslant \alpha d(x_2,x_3)\leqslant \alpha^2 d(x_1,x_2)$$

$$d(x_4,x_5)=d(Ax_3,Ax_4)\leqslant \alpha d(x_3,x_4)\leqslant \alpha^3 d(x_1,x_2)$$

$$\cdots$$

$$d(x_n,x_{n+1})=d(Ax_{n-1},Ax_n)\leqslant \alpha^{n-1} d(x_1,x_2)$$

$$\cdots$$

于是对任何自然数 k，有

$$\begin{aligned}d(x_n,x_{n+k})&\leqslant d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{n+k-1},x_{n+k})\\&\leqslant(\alpha^{n-1}+\alpha^n+\cdots+\alpha^{n+k-2})d(x_1,x_2)\\&=\frac{\alpha^{n-1}(1-\alpha^k)}{1-\alpha}d(x_1,x_2)\\&<\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha}d(x_1,x_2)\to 0\qquad n\to\infty\end{aligned}$$

所以有 $d(x_n,x_{n+k})\to 0(n\to\infty)$，故$\{x_n\}$是基本列.

(2) 其次证明，存在 $x^*\in X$，使 $x^*=A(x^*)$. 由$\{x_n\}$是 X 中的基本列及 X 是完备的距离空间，则存在 $x^*\in X$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$. 注意压缩映射 A 是连续映射，故在 $x_n=A(x_{n-1})$中令 $n\to\infty$，有

$$x^*=A(x^*)$$

(3) 最后证明不动点 x^* 唯一. 设 x_1^* 也是 A 的不动点，即 $x_1^*=A(x_1^*)$，则有

$$0\leqslant d(x^*,x_1^*)=d(Ax^*,Ax_1^*)\leqslant \alpha d(x^*,x_1^*)$$

即$(\alpha-1)d(x^*,x_1^*)\geqslant 0$，由 $\alpha-1<0$，故 $d(x^*,x_1^*)=0$，这说明 $x_1^*=x^*$. □

注 5.1.1 从定理 5.1.1 的证明可以看出满足定理条件的映射 A，其不动点不仅存在唯一，而且其不动点可以用"逐步逼近法"得到. 这个逐步逼近的点列$\{x_n\}$是由 $x_n=A(x_{n-1})$，$n=2,3,4,\cdots$来构造的，不动点与初始点 x_1 的选取无关. 另外，这个逼近过程还给出了误差估计式：

$$d(x_n,x_{n+k})\leqslant\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha}d(x_1,x_2)$$

及

$$d(x_n,x^*)\leqslant\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha}d(x_1,x_2)\tag{5.1-5}$$

为了便于应用，下面给出两个推论：

推论 5.1.1 设 X 是完备的距离空间，A：$X\to X$ 在闭球 $\bar{B}(x_0,r)$上是压缩映射，并且 $d(Ax_0,x_0)\leqslant(1-\alpha)r$，$\alpha\in[0,1)$，则 A 在 $\bar{B}(x_0,r)$中有唯一的不动点.

证 如果能够证明：$\forall x\in\bar{B}(x_0,r)$，$Ax\in\bar{B}(x_0,r)$，并注意到闭球 $\bar{B}(x_0,r)$作为完

备距离空间中的闭集也是完备的距离空间，应用定理 5.1.1 便得结论.

设 $x\in \bar{B}(x_0, r)$，即 $d(x, x_0)\leqslant r$，则

$$
\begin{aligned}
d(Ax, x_0) &\leqslant d(Ax, Ax_0) + d(Ax_0, x_0) \\
&\leqslant \alpha d(x, x_0) + (1-\alpha) r \\
&\leqslant \alpha r + (1-\alpha) r = r
\end{aligned}
$$

即 $Ax\in \bar{B}(x_0, r)$. □

推论 5.1.2 设 X 是完备的距离空间，$A: X\to X$，如果存在常数 $\alpha\in(0, 1)$ 和正整数 n，使 $\forall\, x, y\in X$，有

$$
d(A^n x, A^n y)\leqslant \alpha d(x, y) \tag{5.1-6}
$$

则 A 在 X 中存在唯一不动点.

证 由(5.1-6)式，显见 A^n 是压缩映射，由定理 5.1.1 知 A^n 在 X 中存在唯一不动点 x^*，即 $x^* = A^n x^*$. 由算子乘积定义可知

$$
A^n(Ax^*) = A^{n+1}(x^*) = A(A^n x^*) = Ax^*
$$

这说明 Ax^* 也是 A^n 的不动点，由 A^n 不动点的唯一性可知

$$
x^* = A(x^*)
$$

即 x^* 是 A 的不动点.

下证 x^* 是 A 的唯一不动点，设 x_1^* 也是 A 的不动点，则

$$
\begin{aligned}
d(x^*, x_1^*) &= d(Ax^*, Ax_1^*) = d(A^2 x^*, A^2 x_1^*) \\
&= \cdots = d(A^n x^*, A^n x_1^*) \\
&\leqslant \alpha d(x^*, x_1^*)
\end{aligned}
$$

故 $d(x^*, x_1^*)=0$，即 $x_1^* = x^*$. □

5.1.2 巴拿赫不动点定理的应用

在研究方程解的存在性与唯一性问题时，压缩映射原理起着关键的作用. 下面给出几个应用的例子.

1. 应用压缩映射原理证明隐函数定理

定理 5.1.2(隐函数存在定理) 设二元函数 $F(x, y)$ 在区域 $\{(x, y) \mid a\leqslant x\leqslant b, -\infty< y<+\infty\}$ 上连续，关于 y 的偏导数存在，且满足条件

$$
0 < m\leqslant F_y(x, y) \leqslant M
$$

这里 m, M 是正常数，$m< M$，则存在唯一连续函数 $y= f(x)$，$x\in [a, b]$，满足

$$
F(x, f(x)) = 0 \qquad \forall\, x\in [a, b]
$$

证 在完备距离空间 $C[a, b]$ 中定义算子 A，$\forall\, \varphi(x) \in C[a, b]$，

$$
(A\varphi)(x) = \varphi(x) - \frac{1}{M}F(x, \varphi(x))
$$

由于 $F(x, y)$ 是连续函数，故 $(A\varphi)(x) \in C[a, b]$，即 $A: C[a, b]\to C[a, b]$.

下证 A 是压缩映射. 取 φ_1, $\varphi_2 \in C[a, b]$，根据微分中值定理知，存在 $\theta\in(0, 1)$，满足

$$
\begin{aligned}
&|(A\varphi_2)(x) - (A\varphi_1)(x)| \\
&= \left|\varphi_2(x) - \frac{1}{M}F(x, \varphi_2(x)) - \varphi_1(x) + \frac{1}{M}F(x, \varphi_1(x))\right|
\end{aligned}
$$

$$= \left| \varphi_2(x) - \varphi_1(x) - \frac{1}{M} F_y(x, \varphi_1(x) + \theta(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)))(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) \right|$$

$$\leqslant \left(1 - \frac{m}{M}\right) | \varphi_2(x) - \varphi_1(x) |$$

由于 $0 < \frac{m}{M} < 1$，记 $\alpha = 1 - \frac{m}{M}$，则 $0 < \alpha < 1$，则有

$$|(A\varphi_2)(x) - (A\varphi_1)(x)| \leqslant \alpha | \varphi_2(x) - \varphi_1(x) |$$

$$d(A\varphi_2, A\varphi_1) = \max_{x \in [a, b]} |(A\varphi_2)(x) - (A\varphi_1)(x)|$$

$$\leqslant \alpha \max_{x \in [a, b]} | \varphi_2(x) - \varphi_1(x) | = \alpha d(\varphi_2, \varphi_1)$$

因此，A 是压缩映射，由定理 5.1.1 知存在唯一 $f(x) \in C[a, b]$，使 $(Af)(x) = f(x)$. 这就是说

$$F(x, f(x)) = 0 \qquad x \in [a, b]$$ □

2. 压缩映射原理在求解线性代数方程组中的应用

取 $X = \mathbf{R}^n$（n 维实的欧氏空间），$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$，定义距离

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i - y_i | \tag{5.1-7}$$

则 X 是一完备的距离空间. 在 $\mathbf{R}^n$ 中定义算子 T：$X \to X$，为

$$\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \tag{5.1-8}$$

其中 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ 是给定的 $n \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 X 中的固定向量.

下面找出算子 T 为压缩算子的一个充分条件. 把(5.1-8)式写成分量形式，有

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + b_i \qquad i = 1, 2, 3, \cdots, n$$

令 $\boldsymbol{w} = T\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$. 则

$$d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}) = d(T\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{z}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | y_i - w_i |$$

$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_j - z_j) \right|$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} | x_j - z_j | \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | c_{ij} |$$

$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | c_{ij} | \cdot d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \alpha d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$$

这里 $\alpha = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | c_{ij} |$. 因此，当 $\alpha < 1$ 时，T 为压缩映射，由压缩映射原理可得下面定理.

定理 5.1.3（线性代数方程组解的存在唯一性） 线性方程组

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \tag{5.1-9}$$

满足

$$\sum_{j=1}^{n} | c_{ij} | < 1 \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{5.1-10}$$

时有唯一解 $\boldsymbol{x}_*$，$\boldsymbol{x}_*$ 可以通过求迭代序列

$$\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{x}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(k)}, \cdots \tag{5.1-11}$$

的极限而得到，这里 $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbf{R}^n$ 是任取的，并且迭代过程为

$$x^{(m+1)} = Cx^{(m)} + b \tag{5.1-12}$$

其误差界为

$$d(x^{(m)}, x) \leqslant \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x^{(0)}, x^{(1)}) \tag{5.1-13}$$

条件(5.1-10)式是迭代序列(5.1-11)收敛的充分条件，而且它是对矩阵 C 各行元素的绝对值求和，经常把条件(5.1-10)式叫做**行和判据**. 如果在 $X=\mathbf{R}^n$ 取另外的距离，则可以得到另外的条件. 例如，取距离 $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$，代替(5.1-10)式的条件应为

$$\sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| < 1 \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{5.1-14}$$

(5.1-14)式称为**列和判据**.

通常把 n 元线性方程组写成

$$Ax = c \tag{5.1-15}$$

这里 $A=(a_{ij})$ 为 $n\times n$ 方阵，在 $\det A\neq 0$ 时，方程组(5.1-15)具有唯一解. 为了应用迭代法求解方程组(5.1-15)，可以将 A 分解为 $A=B-G$ 的形式，这里 B 为一适当的满秩矩阵，则(5.1-15)式成为

$$Bx = Gx + c$$

或

$$x = B^{-1}Gx + B^{-1}c$$

在 A 的分解不同时，可得到不同的迭代方法. 最常见有下面两种方法.

其一，雅可比(Jacobi)迭代法. 假设 A 的主对角线上的元素 $a_{jj}\neq 0$，$j=1, 2, \cdots, n$（若 $a_{jj}=0$，由于 A 是满秩的，可经过初等变换，得到主对角线上元素不等于零的满秩矩阵）. 取 $A=D+(A-D)$. 这里 $D=\mathrm{diag}(a_{ii})$ 为对角阵，于是(5.1-15)化为

$$Dx = -(A-D)x + c$$

$$x = -D^{-1}(A-D)x + D^{-1}c$$

则 Jacobi 迭代过程为

$$x^{(m+1)} = -D^{-1}(A-D)x^{(m)} + D^{-1}c$$

或

$$x_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\Big(c_j - \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} a_{jk}x_k^{(m)}\Big) \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{5.1-16}$$

应用条件(5.1-10)式于矩阵 $-D^{-1}(A-D)$ 得行和判据为

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \left|\frac{a_{jk}}{a_{jj}}\right| < 1 \qquad j = 1, 2, 3, \cdots, n$$

或

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} |a_{jk}| < |a_{jj}| \qquad j = 1, 2, 3, \cdots, n \tag{5.1-17}$$

如果矩阵 A 满足(5.1-17)式，则称矩阵 A 严格对角占优，此时 Jacobi 迭代序列(5.1-16)式收敛.

其二，高斯-塞得尔(Gauss-Seidel)迭代法. 将 A 分解为 $A=-L+D-V$，D 同于 Jacobi 迭代中的 D，L 和 V 分别是主对角线上元素全体为零的下三角和上三角矩阵. 于是(5.1-15)式为

$$(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$$

即

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{c}$$

则 Gauss - Seidel 迭代过程为

$$\boldsymbol{x}^{(m+1)}=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^{(m)}+(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{c}$$

或

$$\boldsymbol{x}^{(m+1)}=\boldsymbol{D}^{-1}[\boldsymbol{c}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(m+1)}+\boldsymbol{V}x^{(m)}]$$

$$x_j^{(m+1)}=\frac{1}{a_{jj}}\left(c_j-\sum_{k=1}^{j-1}a_{jk}x_k^{(m+1)}-\sum_{k=j+1}^{n}a_{jk}x_k^{(m)}\right) \tag{5.1-18}$$

其中，$j=1,2,\cdots,n$；$a_{jj}\neq 0$.

令 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{V}$，若 $\boldsymbol{C}$ 满足(5.1-10)不等式，则足以保证 Gauss - Seidel 迭代(5.1-18)收敛.

3. 压缩映射原理在常微分方程方面的应用

设微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases} \tag{5.1-19}$$

其中 $f(t,x)$在矩形 $R=\{(t,x)\,|\,|t-t_0|\leqslant a,\ |x-x_0|\leqslant b\}$上连续，因而存在 $M>0$，对一切$(t,x)\in R$，有

$$|f(t,x)|\leqslant M \tag{5.1-20}$$

并且还进一步假定 $f(t,x)$关于 x满足李普希兹(Lipschitz)条件，即存在常数 K，使对(t,x_1)，$(t,x_2)\in R$都有

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant K|x_1-x_2| \tag{5.1-21}$$

定理 5.1.4(皮卡德(Picard)定理) 满足上述条件的初值问题(5.1-19)在区间$[t_0-\beta,t_0+\beta]$上有唯一解，其中 $\beta=\min\left\{a,\dfrac{b}{M},\dfrac{1}{2K}\right\}$.

证 记 $J=[t_0-\beta,t_0+\beta]$，则 $C(J)$是完备的距离空间，显见

$$\tilde{C}(J)=\{x\in C(J)\,|\,|x(t)-x_0|\leqslant M\beta\}$$

是 $C(J)$中的闭集，所以 $\tilde{C}(J)$作为距离空间也是完备的.

通过积分，可以把初值问题(5.1-19)式写成积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))\,\mathrm{d}\tau \tag{5.1-22}$$

定义映射 A：$\tilde{C}(J)\to\tilde{C}(J)$为

$$(Ax)(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))\,\mathrm{d}\tau \tag{5.1-23}$$

实际上，$\forall\, x(t)\in\tilde{C}(J)$，由 $f(t,x)$在 R上连续，因此$(Ax)(t)$在 $J=[t_0-\beta,t_0+\beta]$上连续. $(Ax)(t_0)=x_0$，并且

$$|(Ax)(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|f(\tau,x(\tau))|\,\mathrm{d}\tau\right|\leqslant M|t-t_0|\leqslant M\beta$$

这就证明了 $A:\tilde{C}(J)\to\tilde{C}(J)$. 再证 A 是压缩映射，根据 Lipschitz 条件(5.1-21)式，有

$$
\begin{aligned}
|(Ax_1)(t)-(Ax_2)(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t}[f(\tau,x_1(\tau))-f(\tau,x_2(\tau))]\,\mathrm{d}\tau\right| \\
&\leqslant |t-t_0|\max_{t\in J}K\,|x_1(\tau)-x_2(\tau)|\leqslant K\beta d(x_1,x_2)
\end{aligned}
$$

从而

$$
d(Ax_1,Ax_2)\leqslant K\beta d(x_1,x_2)
$$

由 β 的定义可知 $\alpha=K\beta<1/2$，故 A 是 $\tilde{C}(J)\to\tilde{C}(J)$ 的压缩映射. 根据定理 5.1.1 知 A 在 $\tilde{C}(J)$ 中存在唯一的不动点 x，即存在唯一在 $[t_0-\beta,t_0+\beta]$ 上的连续函数，满足积分方程(5.1-22). 由于 $(\tau,x(\tau))\in R$，f 在 R 上连续，故(5.1-22)两边可微，因此 x 是初值问题(5.1-19)在 $J=[t_0-\beta,t_0+\beta]$ 上的唯一解，并且 x 是 Picard 迭代序列 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 的极限. 这里

$$
x_{n+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x_n(\tau))\,\mathrm{d}\tau \tag{5.1-24}
$$

□

4. 压缩映射原理在积分方程方面的应用

这里我们应用压缩映射原理解决两类积分方程解的存在性和唯一性. 先考虑费雷德霍姆(Fredholm)积分方程

$$
x(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{5.1-25}
$$

其中 $K(t,\tau)$ 在矩形 $R=\{(t,\tau)\mid a\leqslant t,\tau\leqslant b\}$ 上连续，$f(t)\in C[a,b]$，对 $\forall t\in[a,b]$，有

$$
\int_a^b |K(t,\tau)|\,\mathrm{d}\tau\leqslant M<+\infty \tag{5.1-26}
$$

定理 5.1.5(Fredholm 定理) $\forall f(t)\in C[a,b]$，当 $|\lambda|<\dfrac{1}{M}$ 时，积分方程(5.1-25)都有唯一连续解 $x(t)$，并且函数 $x(t)$ 是迭代序列：$x_0,x_1,\cdots,x_n,\cdots$ 的极限，其迭代过程为

$$
x_{n+1}(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K(t,\tau)x_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{5.1-27}
$$

证 令 $(Ax)(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$，由 $K(t,\tau)$ 的连续性易知，$A:C[a,b]\to C[a,b]$，且 $\forall x,y\in C[a,b]$，有

$$
\begin{aligned}
d(Ax,Ay) &= \max_{a\leqslant t\leqslant b}|(Ax)(t)-(Ay)(t)| \\
&\leqslant |\lambda|\max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b |K(t,\tau)|\,|x(\tau)-y(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant |\lambda|\,M\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(\tau)-y(\tau)| \\
&= |\lambda|\,M\,d(x,y)
\end{aligned}
$$

由 $|\lambda|M<1$，即 A 是压缩映射，根据压缩映射原理知 A 在 $C[a,b]$ 中有唯一的不动点 $\tilde{x}(t)$，即 $\tilde{x}(t)$ 是方程(5.1-25)的唯一连续解. 算子 A 的不动点 $\tilde{x}(t)$ 可以由迭代序列(5.1-27)确定. □

再考虑伏尔泰拉(Volterra)积分方程

$$
x(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{5.1-28}
$$

其中 $f(t)\in C[a,b]$，$K(t,\tau)$在三角形域 R：$a\leqslant\tau\leqslant t\leqslant b$上连续.

定理 5.1.6(Volterra 定理) $\forall f(t)\in C[a,b]$，$\lambda\in\mathbf{R}^1$，则积分方程(5.1-28)有唯一的连续解 $\tilde{x}(t)\in C[a,b]$.

证 记 $M=\max\limits_{(t,\tau)\in R}|K(t,\tau)|$. 令

$$(Ax)(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

则易知 A：$C[a,b]\to C[a,b]$，且 $\forall x,y\in C[a,b]$，有

$$\begin{aligned}d(Ax,Ay)&=\max_{t\in[a,b]}|\lambda|\left|\int_a^t K(t,\tau)(x(\tau)-y(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right|\\&\leqslant|\lambda|(b-a)Md(x,y)\end{aligned}$$

注意，这里$|\lambda|M(b-a)$未必小于 1，故 A并不一定是压缩映射. 但是可以证明：当 n充分大时，$A^n=A\cdot A\cdot\cdots\cdot A$是压缩映射. 事实上，

$$\begin{aligned}(A^2x)(t)&=A((Ax)(t))=A\left[f(t)+\lambda\int_a^t K(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\\&=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,u)\left[f(u)+\lambda\int_a^u K(u,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(A^2x,A^2y)&=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|(A^2x)(t)-(A^2y)(t)|\\&=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\lambda^2\left|\int_a^t K(t,u)\left[\int_a^u K(u,\tau)(x(\tau)-y(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}u\right|\\&\leqslant\lambda^2M^2d(x,y)\frac{1}{2}(u-a)^2\Big|_a^t\\&=\lambda^2M^2d(x,y)\frac{(t-a)^2}{2!}\\&\leqslant\frac{\lambda^2M^2(b-a)^2}{2!}d(x,y)\end{aligned}$$

应用归纳法可以证明：$\forall t\in[a,b]$，$x,y\in C[a,b]$，有

$$d(A^nx,A^ny)\leqslant\frac{|\lambda|^nM^n(t-a)^n}{n!}d(x,y)\leqslant\frac{|\lambda|^nM^n(b-a)^n}{n!}d(x,y)$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|\lambda|^nM^n(b-a)^n}{n!}=0$，故当 n充分大时，有

$$\alpha=\frac{|\lambda|^nM^n(b-a)^n}{n!}<1$$

即 A^n是压缩映射，由推论 5.1.2 知，A有唯一的不动点 $\tilde{x}(t)\in C[a,b]$，即积分方程(5.1-28)有唯一的连续解 $\tilde{x}(t)$. □

从以上的讨论可以看出，许多问题应用泛函分析的方法来处理显得十分简洁.

5.2 紧凸集上的不动点定理

在不动点理论中，除了上节给出的压缩映射原理之外，最著名的不动点定理要数勃劳威尔(Brouwer)不动点定理和绍德尔(Schauder)不动点定理. Brouwer 首先用拓扑学的方

法证明了有限维欧氏空间中的紧凸集 K 到 K 的连续映射必有不动点. 这就是 Brouwer 不动点定理. 随后 Schauder 把它推广到一般的 Banach 空间, 得到 Schauder 不动点定理. 本节简要地介绍这些结果.

5.2.1 凸集

本节标题已指出这里的定理离不开凸集, 因此, 先介绍凸集的概念与性质.

一般线性空间中凸集的概念, 是从平面凸集的特征性质中抽象出来的. 我们知道, 对于平面凸集 A 中的任意两点 x, y, 联结 x, y 的线段上的点

$$\lambda x+(1-\lambda)y \qquad 0\leqslant\lambda\leqslant 1$$

必属于 A(如图 5-1 所示), 在这个性质中, 只要求对(平面上的)向量作线性运算, 因此, 这一概念可以推广到一般线性空间.

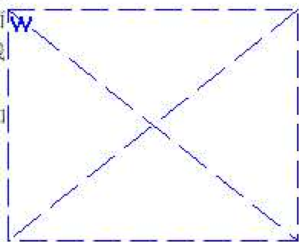


图 5-1

定义 5.2.1 设 X 是一线性空间, K 是 X 的子集, 如果 $\forall x, y\in K$, 联结 x, y 的线段

$$\{\lambda x+(1-\lambda)y \mid 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}\subset K$$

则称 K 为 X 的凸子集(简称凸集).

例 5.2.1 线性赋范空间 X 中的单位球

$$\bar{B}(0,1)=\{x\in X \mid \|x\|\leqslant 1\}$$

是一凸集.

事实上, 当 $x, y\in\bar{B}(0,1)$ 时, $\|x\|\leqslant 1$, $\|y\|\leqslant 1$, 于是 $\forall\lambda\in[0,1]$

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|\leqslant|\lambda|\ \|x\|+|1-\lambda|\ \|y\|\leqslant|\lambda|+|1-\lambda|=1$$

故 $\bar{B}(0,1)$ 是凸集.

例 5.2.2 设 X 是线性空间, 则 X 中的空集, 单点集以及 X 的任何线性子空间都是凸集.

例 5.2.3 连续函数空间 $C[a,b]$ 中的一切正元 $\{x(t)\in C[a,b] \mid x(t)\geqslant 0, \forall t\in[a,b]\}$ 是一个凸集.

由凸集的定义出发, 容易得到凸集的下列 7 个运算性质.

性质 1 设 $K_\alpha(\alpha\in I)$ 是 X 中的凸集, 其中 I 是任意指标集, 则 $\bigcap_{\alpha\in I}K_\alpha$ 也是 X 中的凸集.

证 设 $K=\bigcap_{\alpha\in I}K_\alpha$, $\forall x, y\in K$, 则 $\forall\alpha\in I$, $x, y\in K_\alpha$, 由于 K_α 是凸集, 故当 $\lambda\in[0,1]$ 时,

$$\lambda x+(1-\lambda)y\in K_\alpha \qquad \forall\alpha\in I$$

即 $\lambda x+(1-\lambda)y\in\bigcap_{\alpha\in I}K_\alpha=K$, 由此可见 K 是凸集. □

由于任意多个闭集的交集是闭集, 再由性质 1, 可得:

性质 2 设 $K_\alpha(\alpha\in I)$ 是 X 中的闭凸集, 则 $\bigcap_{\alpha\in I}K_\alpha$ 是闭凸集. □

性质 3 设 $C\subset X$, 则 C 为 X 的凸集 $\Longleftrightarrow$ C 包含其中元素的所有凸组合, 即对任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_m\in C$ 和任意满足 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$ 的非负实数 λ_i, $i=1,2,\cdots,m(m\geqslant 2)$, 恒有 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\in C$.

证 $\Leftarrow$ 显然.

$\Rightarrow$ 应用数学归纳法. 当 $m=2$, 由凸集定义可知结论成立. 设 $m=k$ 时结论成立，则当 $m=k+1$ 时，设 $x_i\in C$, $\lambda_i\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,k+1$, $\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i=1$.

如果 $\lambda_{k+1}=1$, 则 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$, 这时 $\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x_i=x_{k+1}\in C$, 结论成立；

现设 $0<\lambda_{k+1}<1$, $\lambda=\lambda_1+\lambda_2\cdots+\lambda_k$, $\lambda_i'=\frac{\lambda_i}{\lambda}$, 则 $\lambda_i'\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i'=1$, $\lambda_{k+1}=1-\lambda$, 由归纳假设，$y=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i' x_i\in C$, 而 $\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x_i=\sum_{i=1}^{k}\lambda\lambda_i' x_i+\lambda_{k+1}x_{k+1}=\lambda y+(1-\lambda)x_{k+1}$, 由凸性定义可知，$\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x_i\in C$. □

定义 5.2.2 设 X 是一线性空间，$A\subset X$, 称包含 A 的一切凸集的交集为 A 的凸包，记为 $\mathrm{Co}\,A$.

例 5.2.4 设 A 由 X 的 m 个点 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 组成，则

$$\mathrm{Co}\,A=\left\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,\ \lambda_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m\right\}$$

特别地，在三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中，包含四个点的最小凸集是以这四个点为顶点的四面体.

对于任何集合 A, 可以用如下的性质 4 来刻画 A 的凸包.

性质 4 设 $A\subset X$, 则

$$\mathrm{Co}\,A=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \,\middle|\, x_i\in A,\ \lambda_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\ n\text{任意}\right\} \tag{5.2-1}$$

证 记(5.2-1)式右边的集合为 S, 由性质 3 知 S 是凸集，显见 $A\subset S$, 所以 S 是包含 A 的凸集. 为证 S 是包含 A 的最小凸集，可设 F 为包含 A 的凸集，则对 $x_i\in A\subset F$, $\lambda_i\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,n$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, 有 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in F$, 则 $S\subset F$, 即 S 是包含 A 的最小凸集，故 $\mathrm{Co}\,A=S$. □

下面考虑线性赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的凸集.

定义 5.2.3 设 X 是线性赋范空间，$K\subset X$, 如果 K 满足两个条件：

(1) K 是凸集；

(2) K 中包含内点，

则称 K 为凸体.

显然，X 中的单位球 $B(0,1)=\{x\in X \mid \|x\|<1\}$ 及 $\bar{B}(0,1)=\{x\in X \mid \|x\|\leqslant 1\}$ 都是凸体.

定义 5.2.4(同胚) 设 X_1, X_2 是线性赋范空间，$A\subset X_1$, $B\subset X_2$. 如果存在 A 到 B 上的一一映射 φ 满足：

(1) φ: $A\to B$ 连续；

(2) φ^{-1}: $B\to A$ 连续，

则称 A 与 B 同胚.

性质 5　n维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中任何两个有界闭凸体是同胚的.

这条性质的几何意义是很明显的，其严格证明十分繁长，这里仅在 $\mathbf{R}^2$ 中给出其证明思路.

先假定 A, B相交，并且有公共内点(如图5－2所示) p_0，设 A, B的边界分别为 Γ_A, Γ_B. 过 p_0 的任一条射线与 Γ_A, Γ_B 分别交于 c 与 c'，这样就建立了 Γ_A 与 Γ_B 的一一映射，并且这一映射是双向连续. 若 x是 A 内任一点，$x\neq p_0$，连接 p_0 与 x的射线，如果与 Γ_A、Γ_B 分别交于 c、c'，则在射线 p_0x上取一点 x'，使得

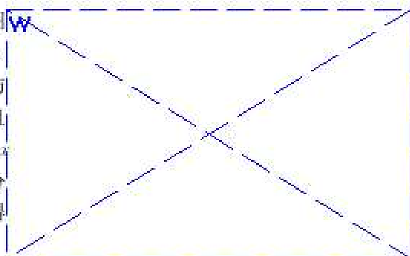


图 5－2

$$\frac{|p_0x|}{|p_0x'|}=\frac{|p_0c|}{|p_0c'|}$$

这里，$|p_0x|$表示两点之间的距离，则映射 $x\to x'$是 A到 B的一一映射(p_0 映到自身)，而且是双向连续.

若 A与 B的交无内点，则可先取 A的内点 p_0，把 B适当平移得到 B'，使得 B'包含 p_0 点为内点，这样可以证明 A与 B'同胚；再由平移映射是一一映射且是双向连续，故 A与 B同胚. □

性质 6　设 X是实的 n维线性赋范空间，$\mathbf{R}^n$ 是 n维欧氏空间，$A\subset X$是有界闭凸体，则存在 $\mathbf{R}^n$ 的有界闭凸体 B，使 A与 B同胚.

证　设$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是 X的一组基，$\forall\, x\in A$，则 x可以唯一地表示为

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$$

这样可得 $\mathbf{R}^n$ 中点集

$$B=\left\{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\in\mathbf{R}^n \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\in A\right\}$$

定义映射 φ: $A\to B$, $\varphi(x)=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，则是一一映射，且 φ是线性连续映射，所以 B为闭集. 下证 B为凸集. 设$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，$(k_1, k_2, \cdots, k_n)\in B$，$\forall\,\lambda\in[0, 1]$，由于 A凸，$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$，$y=\sum_{i=1}^{n}k_i e_i\in A$，知

$$\lambda x+(1-\lambda)y=\sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i+(1-\lambda)k_i)e_i\in A$$

则
$$(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)k_1, \lambda\alpha_2+(1-\lambda)k_2, \cdots, \lambda\alpha_n+(1-\lambda)k_n)\in B$$

即
$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)+(1-\lambda)(k_1, k_2, \cdots, k_n)\in B$$

故 B是凸集. □

性质 7　设 K是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个紧凸子集，则必存在正整数 $m\leqslant n$，使得 K同胚于 $\mathbf{R}^m$ 中的单位球.

证明可参看文献[3].

5.2.2　勃劳威尔不动点定理

定理 5.2.1(勃劳威尔(Brouwer)不动点定理)　设 $\bar{B}(0, 1)=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \|x\|\leqslant 1\}$，

$T: \bar{B}(0,1) \to \bar{B}(0,1)$连续，则存在 $x^* \in \bar{B}(0,1)$，使 $Tx^* = x^*$.

这一结果是 Brouwer 在 1910 年发表的，但这个结论的等价形式早被 H. Poincare 发现，关于这一定理的证明方法有多种. 证明中有一些很简短，但应用了代数拓扑. 纯分析证明比较繁长，并需要较多的基础知识，这里略去其证明. 需要指出，这个定理只保证不动点的存在性，不保证其唯一，也没有给出求不动点的迭代格式.

由性质 5，我们可得到如下的推论.

推论 5.2.1 设 $K \subset \mathbf{R}^n$ 是有界闭凸体，$T: K \to K$ 连续，则 T 在 K 上存在不动点.

证 由性质 5 知，K 与 $\mathbf{R}^n$ 中的单位闭球 $\bar{B}(0,1)$ 同胚. 设 $\varphi: \bar{B}(0,1) \to K$ 是双向连续的一一映射. 由 $T: K \to K$ 连续，则 $\varphi^{-1} T\varphi: \bar{B}(0,1) \to \bar{B}(0,1)$，由定理 5.2.1 知，$\varphi^{-1} T\varphi$ 在 $\bar{B}(0,1)$ 中存在不动点 x^*，即 $\varphi^{-1} T\varphi x^* = x^*$，则 $T(\varphi x^*) = \varphi(x^*)$，即 $\varphi(x^*)$ 是 T 在 K 上的不动点. □

应用性质 7 容易得到下面的推论.

推论 5.2.2 设 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界闭凸集，$T(K) \subset K$ 连续，则 T 在 K 上存在不动点. □

结合性质 7，可把 Brouwer 不动点定理推广到 n 维线性赋范空间.

定理 5.2.2 设 X 是 n 维线性赋范空间，$K \subset X$ 是有界闭凸集，$T(K) \subset K$ 连续，则 T 在 K 上存在不动点. □

下面给出 Brouwer 定理的一个应用.

定理 5.2.3(代数基本定理) 设 $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ 是一复多项式，则存在 z_0，使得 $f(z_0) = 0$.

证 不失一般性，设 $a_n = 1$. 令 $z = re^{i\theta}$，$\theta \in [0, 2\pi)$，

$$\alpha = 2 + |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|$$

在复平面上定义复值函数 g 如下：

$$g(z) = \begin{cases} z - \dfrac{1}{\alpha e^{i(n-1)\theta}} f(z) & |z| \leqslant 1 \\ z - \dfrac{1}{\alpha z^{n-1}} f(z) & |z| > 1 \end{cases}$$

显然 g 是连续映射. 考虑凸体 $D = \{z \mid |z| \leqslant \alpha\}$，现证 $g: D \to D$. 实际上，$\forall z \in D$，

当 $|z| \leqslant 1$ 时，有

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leqslant |z| + \frac{1}{\alpha}|f(z)| \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha}(1 + |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|) \\ &\leqslant 1 + 1 = 2 < \alpha \end{aligned}$$

当 $|z| > 1$ 时，有

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leqslant \left| z - \frac{1}{\alpha} z - \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}}{\alpha z^{n-1}} \right| \\ &\leqslant \frac{|z|}{\alpha}(\alpha - 1) + \frac{1}{\alpha}(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|) \\ &\leqslant (\alpha - 1) + \frac{1}{\alpha}(\alpha - 2) = \alpha - \frac{2}{\alpha} < \alpha \end{aligned}$$

故 $g: D\to D$，则由 Brouwer 不动点定理，存在 $x_0\in D$，使 $g(x_0)=x_0$，即 $f(x_0)=0$. □

5.2.3 绍德尔(Schauder)不动点定理

在有限维线性赋范空间中，Brouwer 对连续映射成功地给出了不动点定理. 人们不禁要问：在无穷维空间中，是否对连续映射也能得到类似的结果，即若 f 是 $\bar{B}(0,1)\to\bar{B}(0,1)$ 的连续映射，f 在 $\bar{B}(0,1)$ 上是否必有不动点？然而，事实并非如此简单.

例 5.2.5 取 $X=l^2=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mid \|x\|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2<\infty\right\}$. $\forall x\in X$，令 $f(x)=(\sqrt{1-\|x\|^2},x_1,x_2,\cdots)$，则 $f:\bar{B}(0,1)\to\bar{B}(0,1)$. 容易验证 f 连续. 事实上，$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)\in X$，

$$\|f(x)-f(y)\|^2=\left|\sqrt{1-\|x\|^2}-\sqrt{1-\|y\|^2}\right|^2$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^2\to 0\qquad 当\ y\to x 时$$

故 f 连续. 但 f 在 $\bar{B}(0,1)$ 上没有不动点. 事实上，如果 f 在 $\bar{B}(0,1)$ 上有不动点 $\bar{x}$，则 $\bar{x}=f(\bar{x})$，从而

$$\|\bar{x}\|=\|f(\bar{x})\|=1$$

另一方面，从$(\sqrt{1-\|\bar{x}\|^2},\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_{n-1},\cdots)=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n,\cdots)$，则有 $\bar{x}_1=\bar{x}_2=\bar{x}_3=\cdots=\bar{x}_n=\cdots$由 $\bar{x}\in l^2$，得 $\bar{x}_1=\bar{x}_2=\cdots=\bar{x}_n=\cdots=0$，即 $\|\bar{x}\|=0$，这与 $\|\bar{x}\|=1$ 矛盾.

此例说明，在无穷维线性赋范空间 X 中，不能简单地对连续映射建立不动点定理，需要加强条件，如要求 T 是全连续映射.

定义 5.2.5(全连续算子) 设 X_1，X_2 都是实的线性赋范空间，$T: D(T)(\subset X_1)\to X_2$，若 T 把 $D(T)$ 的任一有界子集映为 X_2 中的列紧集，则称 T 是一**紧算子**(或**紧映射**). 连续的紧算子叫做**全连续算子**.

下面几条引理给出了全连续算子的一些性质(引理 5.2.1～5.2.3).

引理 5.2.1 设(1) $T_n: D\to X_2$ 是全连续算子($n=1,2,3,\cdots$)，且 $T: D\to X_2$；

(2) $\forall S\subset D$(S有界)，$\|T_nx-Tx\|\to 0(n\to\infty)$关于 S 一致，则 $T: D\to X$ 全连续.

证 先证 T 连续. 设 $x_n\to x_0$，(x_n，$x_0\in D$)，则 $S=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$是 D 中的有界集，由条件(2)，$\forall \varepsilon>0$，取 k，使

$$\|T_kx_n-Tx_n\|<\frac{1}{3}\varepsilon\qquad n=0,1,2,\cdots\tag{5.2-2}$$

再由 T_k 全连续知，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，恒有

$$\|T_kx_n-T_kx_0\|<\frac{1}{3}\varepsilon\tag{5.2-3}$$

由(5.2-2)、(5.2-3)式，当 $n>N$ 时，

$$\|Tx_n-Tx_0\|\leqslant\|Tx_n-T_kx_n\|+\|T_kx_n-T_kx_0\|+\|T_kx_0-Tx_0\|$$

$$<\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon=\varepsilon$$

故 T 在 x_0 点连续. 由 $x_0\in D$ 任意，即知 T 在 D 上连续.

再证 T 是紧算子. 设 $S\subset D$ 有界，由条件(2)，$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，使 $\|T_Nx-Tx\|<\varepsilon$，对

任何 $x\in S$ 都成立，故 $T_N(S)$ 是 $T(S)$ 的一个 ε 网．再由 $T_N(S)$ 列紧知 $T(S)$ 也列紧，故 T 是全连续算子． □

引理 5.2.2 设 $T: D(\subset X_1)\to X_2$ 全连续，则对 $\varepsilon>0$，存在连续有界算子 T_ε：$D\to X_2(\varepsilon)$，满足

$$\| Tx - T_\varepsilon x \| < \varepsilon \qquad \forall\ x\in D \tag{5.2-4}$$

其中 D 是 X_1 中的有界集，$X_2(\varepsilon)$ 是 X_2 的某一有限维子空间．

证 由 $T(D)$ 是 X_2 中的列紧集，故 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}\subset T(D)$，构成 $T(D)$ 有限 ε 网．令

$$X_2(\varepsilon) = \mathrm{span}\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$$

则 $X_2(\varepsilon)$ 是 X_2 的有限维子空间(其维数不超过 m)．

$\forall\ y\in X_2$，令

$$d_i(y) = \max\{\varepsilon - \| y - y_i \|, 0\} \qquad i = 1, 2, \cdots, m \tag{5.2-5}$$

则 $d_i(y)$ 是 $X_2(\varepsilon)$ 上的非负连续泛函，且当 $y\in B(y_i, \varepsilon)$，$d_i(y)>0$．再令

$$d(y) = \sum_{i=1}^{m} d_i(y) \qquad \forall\ y\in X_2(\varepsilon) \tag{5.2-6}$$

当 $x\in D$ 时，必有 y_i 使 $\| Tx - y_i \| < \varepsilon$，故 $d(Tx)>0$．

作算子 T_ε 如下：$\forall\ x\in D$，

$$T_\varepsilon x = \frac{1}{d(Tx)}\sum_{i=1}^{m} d_i(Tx)\, y_i \tag{5.2-7}$$

显见 $T_\varepsilon: D\to X_2(\varepsilon)$ 连续(因 $d_i(y)$ 连续及 T 连续)．当 $Tx\in B(y_i, \varepsilon)$ 时(即 $\| Tx - y_i \| \geqslant \varepsilon$ 时)，有 $d_i(Tx)=0$，故当 $x\in D$ 时，

$$\begin{aligned}\| Tx - T_\varepsilon x \| &= \frac{1}{d(Tx)}\sum_{i=1}^{m} d_i(Tx)(Tx - y_i) \\ &\leqslant \frac{1}{d(Tx)}\sum_{i=1}^{m} d_i(Tx)\| Tx - y_i \| < \varepsilon \end{aligned}\tag{5.2-8}$$

故 $\| T_\varepsilon x \| < \| Tx \| + \varepsilon$ 由 T 全连续及 D 有界，则存在 $M>0$，对 $x\in D$，有 $\| Tx \| \leqslant M$，结合(5.2-8)式，有对 $x\in D$，$\| T_\varepsilon x \| \leqslant M+\varepsilon$ 即 T_ε 在 D 上有界． □

引理 5.2.3 设 $D\subset X_1$ 是有界集，T_n：$D\to X_2$ 全连续，T_0：$D\to X_2$，满足对 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，对 $x\in D$，有

$$\| T_n x - T_0 x \| < \varepsilon \tag{5.2-9}$$

记 $K_n = T_n(D)$，$n=1, 2, 3, \cdots$，则 $K = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} K_n$ 是列紧集．

证 由引理 5.2.1 知，T_0 是 $D\to X_2$ 的全连续算子，令

$$Q = \bigcup_{n=0}^{N} K_n$$

由于 $K_n(n=0, 1, 2, \cdots, N)$ 为列紧集，故 Q 也是列紧集．下证 Q 是 K 的 ε 网．事实上，$\forall\ y\in K$，如果 $y\in Q$，则取 $y\in Q$，则 $y\in O(y, \varepsilon)$．如果 $y\in Q$，则存在 $n>N$，$y\in K_n$，此时必存在 $x\in D$，使 $T_n x = y$，取 $u = T_0 x\in K_0$，由(5.2-9)式有

$$\| y - u \| = \| T_n x - T_0 x \| < \varepsilon$$

即 $y\in O(u, \varepsilon)$，$u\in K_0\subset \bigcup\limits_{n=0}^{N} K_n = Q$，即 Q 是 K 的 ε 网，故 $K = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} K_n$ 是列紧集． □

定理 5.2.4(绍德尔(Schauder)不动点定理) 设 X是实的 Banach 空间，$K\subset X$是有界闭凸集，全连续算子 T映 K到自身，即 $T(K)\subset K$,则存在 $x^*\in K$,使 $Tx^*=x^*$.

证 取一列正数 $\varepsilon_n\to 0$(如取 $\varepsilon_n=1/n$)($n\to\infty$)，按照引理 5.2.2 的方法构造算子列 $\{T_n\}$，使在 K上一致逼近于 T. 由 T_n的定义(5.2-7)式易知，对 $x\in K$，$T_n x\in K$，即 $T_n(K)\subset K$，且 $T_n(K)$是 X的某一有限维子空间 $X(\varepsilon_n)$的点集. 记 $K(\varepsilon_n)=K\cap X(\varepsilon_n)$，则 $T_n(K)\subset K(\varepsilon_n)$，而 $K(\varepsilon_n)$是有限维子空间 $X(\varepsilon_n)$中的有界闭凸集，把 T_n限制在 $K(\varepsilon_n)$上，有

$$T_n(K(\varepsilon_n))\subset K(\varepsilon_n)$$

由定理 5.2.2 知，存在 $x_n\in K(\varepsilon_n)$，使 $T_n x_n=x_n$($n=1,2,3,\cdots$). 再由引理 5.2.3 知点集 $\bigcup_{n=1}^{\infty}T_n(K)$是列紧集. 由$\{x_n\}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}T_n(K)$知$\{x_n\}$存在收敛子列$\{x_{n_j}\}$，且由 K是闭集知，$j\to\infty$时，

$$x_{n_j}\to x^*\in K$$

下面证明 x^*是 T在 K上的不动点. 事实上，由

$$\begin{aligned}\|Tx^*-x^*\|&\leqslant\|Tx^*-Tx_{n_j}\|+\|Tx_{n_j}-T_{n_j}x_{n_j}\|+\|T_{n_j}x_{n_j}-x^*\|\\&=\|Tx^*-Tx_{n_j}\|+\|Tx_{n_j}-T_{n_j}x_{n_j}\|+\|x_{n_j}-x^*\|\end{aligned}\quad(5.2-10)$$

$\forall\varepsilon>0$，可以找到充分大的自然数 N_1，对每个 $j>N_1$，有

$$\|x_{n_j}-x^*\|<\frac{1}{3}\varepsilon,\ \|Tx^*-Tx_{n_j}\|<\frac{1}{3}\varepsilon\quad(5.2-11)$$

同时利用 T_{n_j}在 K上一致逼近于 T，则对$\frac{1}{3}\varepsilon>0$，可以找到 N_2，当 $j>N_2$时，$\forall x\in K$，有

$$\|Tx-T_{n_j}x\|<\frac{1}{3}\varepsilon\quad(5.2-12)$$

特别地，当 $x=x_{n_j}$时，(5.2-12)式成立. 取 $N=\max(N_1,N_2)$，当 $j>N$时，(5.2-11)、(5.2-12)式均成立，结合不等式(5.2-10)，则有当 $j>N$时，

$$\|Tx^*-x^*\|<\varepsilon$$

从而 $Tx^*=x^*$. □

注 5.2.1 分析定理 5.2.4 的证明过程，$T(D)$是列紧集的事实起到了关键作用. 因此，如果适当减弱算子 T的条件，加强 D或 $T(D)$的条件，也可以得出 T有不动点的结论.

推论 5.2.3 (1) 设 $D\subset X$是紧凸集，$T(D)\subset D$连续，则 T在 D上存在不动点；

(2) 设 $D\subset X$是凸闭集，$T(D)\subset D$连续，且 $T(D)$是列紧集，则 T在 D在存在不动点. □

Schauder 不动点定理的应用十分广泛，这里仅给以下两个应用.

1. 常微分方程解的存在性

定理 5.2.5(皮亚诺(Peano)) 设 $f(t,x)$在矩形

$$D:\ |t-t_0|\leqslant a,\ |x-x_0|\leqslant b$$

内连续，记 $\beta=\max\limits_{(t,x)\in D}|f(t,x)|$，$h=\min\left(a,\dfrac{b}{\beta}\right)$，则在$[t_0-h,t_0+h]$上存在一个连续函数 $x^*(t)$满足

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5.2-13}$$

证 初值问题(5.2-13)等价于积分方程

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau \tag{5.2-14}$$

考虑积分算子 T:

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau \qquad x \in C[t_0 - h, t_0 + h]$$

取闭球 $\bar{B}(x_0, b) \subset C[t_0 - h, t_0 + h]$,则 $\bar{B}(x_0, b)$是 $C[t_0 - h, t_0 + h]$中的闭凸集,下证 T: $\bar{B}(x_0, b) \to \bar{B}(x_0, b)$是全连续算子.

首先,$\forall\, x(t) \in \bar{B}(x_0, b)$,由于$\forall\, t \in [t_0 - h, t_0 + h]$,$|x(t) - x_0| \leqslant b$,则有

$$|(Tx)(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \beta h \leqslant \beta \cdot \frac{b}{\beta} = b$$

即$(Tx)(t) \in \bar{B}(x_0, b)$.

其次证 T全连续,先证 T在 $\bar{B}(x_0, b)$上连续. $\forall \{x_n(t)\} \subset \bar{B}(x_0, b)$,$x(t) \in \bar{B}(x_0, b)$,当$\|x_n - x\| \to 0$时,有

$$|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| \to 0$$

从而得(应用积分极限定理)

$$\|(Tx_n)(t) - (Tx)(t)\| \to 0$$

即 T在 x点连续,由 $x \in \bar{B}(x_0, b)$任意,则知 T在 $\bar{B}(x_0, b)$上连续.

再证 $T(\bar{B}(x_0, b))$是列紧集,应用 Arzela 引理(推论 2.3.2),只需证明 $T(\bar{B}(x_0, b))$一致有界且等度连续.

(1) 证 $T(\bar{B}(x_0, b))$一致有界. $\forall\, x \in \bar{B}(x_0, b)$,则有

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| &\leqslant |x_0| + \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right| \\ &\leqslant |x_0| + \beta|t - t_0| \leqslant |x_0| + \beta h \end{aligned}$$

从而

$$\|Tx\| \leqslant |x_0| + \beta h \xlongequal{\text{def}} M$$

(2) 证 $T(\bar{B}(x_0, b))$等度连续. $\forall\, x \in \bar{B}(x_0, b)$,$t_1, t_2 \in [t_0 - h, t_0 + h]$,有

$$|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| \leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2} f(\tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \beta|t_2 - t_1|$$

故 $T(\bar{B}(x_0, b))$等度连续.

这就证明了 T: $\bar{B}(x_0, b) \to \bar{B}(x_0, b)$全连续,由 Schauder 不动点定理知,存在 $x^*(t) \in \bar{B}(x_0, b)$,使$(Tx^*)(t) = x^*(t)$. 即

$$x^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x^*(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

从而积分方程(5.2-14)有解 $x^*(t)$,则 $x^*(t)$是初值问题(5.2-13)的解. □

2. 非线性积分方程解的存在性

考虑 Hammerstein 型积分方程

$$x(t) = \lambda\int_0^1 K(t, s)\, g(s, x(s))\, \mathrm{d}s \tag{5.2-15}$$

的可解性，其中 λ 为参数，$K(t, s)$ 为积分核.

定理 5.2.6 设函数 $g(t, x)$ 是 $[0, 1]\times\mathbf{R}^1$ 上的连续函数，且存在 $b>0$，使对于 $L^2[0, 1]$ 中的闭球 $\bar{B}(0, M)$ 内的任一点 x，有

$$\int_0^1 |g(s, x(s))|^2\, \mathrm{d}s \leqslant b \tag{5.2-16}$$

再设映射 G: $x(t)\to g(t, x(t))$ 在 $\bar{B}(0, M)$ 上连续，且存在 $c>0$ 满足

$$\int_0^1\int_0^1 |K(t, s)|^2\, \mathrm{d}s\mathrm{d}t < c^2 \tag{5.2-17}$$

则当 $|\lambda|\leqslant\dfrac{M}{bc}$ 时，方程(5.2-15)在 $\bar{B}(0, M)$ 内有解.

证 考虑算子

$$(Tx)(t) = \lambda\int_0^1 K(t, s)\, g(s, x(s))\, \mathrm{d}s$$

由 Schwarz 不等式，有

$$|(Tx)(t)|^2 \leqslant \lambda^2\int_0^1 |K(t, s)|^2\, \mathrm{d}s\int_0^1 |g(s, x(s))|^2\, \mathrm{d}s$$

$$\int_0^1 |(Tx)(t)|^2\, \mathrm{d}t\leqslant \lambda^2\int_0^1 |g(s, x(s))|^2\, \mathrm{d}s\int_0^1 \mathrm{d}t\int_0^1 |K(t, s)|^2\, \mathrm{d}s\leqslant \lambda^2 b^2 c^2$$

所以当 $|\lambda|\leqslant\dfrac{M}{bc}$ 时，有

$$\left[\int_0^1 |(Tx)(t)|^2\, \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant |\lambda|\, bc\leqslant M$$

即 $(Tx)(t)\in\bar{B}(0, M)$，可以证明，$T=K\cdot G$ 是全连续算子（证明略）. 则由 Schauder 不动点定理知，T 在 $\bar{B}(0, M)$ 上存在不动点. □

5.3 最佳逼近

逼近理论主要研究用较简单的函数去近似代替较复杂的函数，例如，在微积分中，我们曾用泰勒(Taylor)多项式近似代替已知任何阶光滑的函数，应用伯恩斯坦多项式来逼近连续函数(Weierstrass 定理)，还应用 Fourier 级数的部分和来逼近绝对可积函数. 这些都是应用简单函数逼近复杂函数的典型例子. Weierstrass 定理告诉我们，给定函数 $f\in C[0, 1]$，$\forall\ \varepsilon>0$，总能找到伯恩斯坦多项式

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

满足
$$|B_n(x) - f(x)|\leqslant\varepsilon$$

这里 $B_n(x)$ 的次数 n 可能很高. 现在的问题是对多项式的次数加以限制，要求出 n 次多项式 $P_n(x)$ 使 $|P_n(x) - f(x)|$ 最小，这就是最佳逼近问题.

5.3.1 线性赋范空间中的最佳逼近

定义 5.3.1(最佳逼近) 设 X 是线性赋范空间，Y 是 X 的线性子空间；$x\in X$，如果存

在 $y_0 \in Y$，使

$$\| x - y_0 \| = d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \| x - y \| \qquad (5.3-1)$$

则称 y_0 是 x 在 Y 中的一个最佳逼近.

例 5.3.1 设 $X = H$ 是 Hilbert 空间，$\{e_n\}$ 是 H 的完全标准正交系，取 $Y = \text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，则 Y 是 H 的有限维子空间，由最佳逼近定理(定理3.4.3)可知，$y_0 = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$ 是 x 在 Y 中的最佳逼近.

由定义 5.3.1 易知，x 在 Y 中的最佳逼近 y_0 是 Y 中到 x 距离最短的点，这样的 $y_0 \in Y$ 可能存在，也可能不存在.

定理 5.3.1(最佳逼近的存在性) 设 X 是线性赋范空间，Y 是 X 的有限维子空间，则对 $x \in X$，x 在 Y 中存在最佳逼近.

证 设 $x \in X$ 给定，作 Y 中的闭球 $\bar{B} = \{y \in Y \mid \| y \| \leqslant 2 \| x \|\}$，于是

$$d(x, \bar{B}) = \inf_{y \in \bar{B}} \| x - y \| \leqslant \| x - 0 \| = \| x \| \qquad (5.3-2)$$

当 $y_1 \in Y$，$y_1 \notin \bar{B}$ 时，$\| y_1 \| > 2 \| x \|$，所以有

$$\| x - y_1 \| \geqslant \| y_1 \| - \| x \| > \| x \| \geqslant d(x, \bar{B}) \qquad (5.3-3)$$

由(5.3-2)、(5.3-3)式知 $\forall y \in Y$，有 $\| x - y \| \geqslant d(x, \bar{B})$，故 $d(x, Y) \geqslant d(x, \bar{B})$. 再由 $\bar{B} \subset Y$，则 $d(x, Y) \leqslant d(x, \bar{B})$. 从而有 $d(x, \bar{B}) = d(x, Y)$.

由于 $\bar{B}$ 是有限维子空间中的有界闭集，故 $\bar{B}$ 是紧集. 在 $\bar{B}$ 上定义函数 $f: \bar{B} \to \mathbf{R}^1$ 为

$$f(y) = \| x - y \|$$

由于范数是连续函数，所以 $f(y)$ 在 $\bar{B}$ 取得最小值，即存在 $y_0 \in \bar{B}$，使

$$f(y_0) = \| x - y_0 \| = \inf_{y \in \bar{B}} \| x - y \| = d(x, \bar{B}) = d(x, Y) \qquad \square$$

例 5.3.2 设 $X = C[a, b]$，$Y = \text{span}\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$，$x_k(t) = t^k$，$k = 0, 1, \cdots, n$，则 Y 是 X 的 $n+1$ 维子空间，Y 中的元素是次数不超过 n 的多项式. 给定 $x(t) \in X$，存在 $y_0(t) \in Y$，使对 $y(t) \in Y$，有

$$\| x - y_0 \| = \max_{t \in [a, b]} | x(t) - y_0(t) | \leqslant \max_{t \in [a, b]} | x(t) - y(t) | = \| x - y \|$$

例 5.3.3 设 $X = \mathbf{R}^2$，在 X 中定义范数为，对 $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$，

$$\| x \|_1 = | x_1 | + | x_2 |$$

取 $Y = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 \mid y_1 = y_2\}$，$x = (1, -1)$. 对 $y = (\eta, \eta) \in Y$，有

$$\| x - y \| = | 1 - \eta | + | -1 - \eta | \geqslant 2$$

$$\| x - 0 \| = \| x \| = 2$$

故 $d(x, y) = 2$，当 $y = (\eta, \eta)$ 满足 $|\eta| \leqslant 1$ 时，$\| x - y \| = |1 - \eta| + |-1 - \eta| = (1 - \eta) + (\eta + 1) = 2$，故对 $|\eta| \leqslant 1$ 的一切 $y = (\eta, \eta)$ 都是 x 在 Y 中的最佳逼近.

引理 5.3.1 X 是线性赋范空间，$Y(\subset X)$ 是其子空间，$x \in X$，则 x 在 Y 中的最佳逼近构成的集合 M 是凸集.

证 如果 M 是空集或单点集，显然 M 是凸集. 现在设 M 的元素至少两个点. 令 $d = d(x, Y)$，设 $y, z \in M$，则有

$$\| x - y \| = \| x - z \| = d$$

对 $\lambda \in [0, 1]$，取 $w = \lambda y + (1 - \lambda) z$，有

$$\begin{aligned}\|x-w\| &= \|\lambda(x-y)+(1-\lambda)(x-z)\| \leqslant \lambda\|x-y\|+(1-\lambda)\|x-z\| \\ &= \lambda d+(1-\lambda)d = d\end{aligned}$$

所以 $w\in M$，即 M是凸集. □

由引理 5.3.1 可知，如果 x在 Y中具有两个以上的最佳逼近，例如，y，z是 x在 Y中的最佳逼近，则联结 y与 z的线段 $W=\{w|w=\lambda y+(1-\lambda)z, \lambda\in[0,1]\}$上的每一点都是 x在 Y中的最佳逼近. 为了得到最佳逼近的唯一性的条件，我们给出以下定义.

定义 5.3.2(严格凸) 设 X是线性赋范空间，如果 X的某种范数 $\|\cdot\|$满足：$\forall x, y\in X$，$x\neq y$，$\|x\|=\|y\|=1$，都有

$$\|x+y\|<2$$

则称范数 $\|\cdot\|$是严格凸的，并称$(X, \|\cdot\|)$是严格凸赋范空间.

例 5.3.4 (1)**(严格凸空间之例)**. Hilbert 空间是严格凸空间.

(2)**(非严格凸之例)**. $C[a, b]$是非严格凸的.

证 (1) $\forall x, y\in H$(H为 Hilbert 空间)，$\|x\|=\|y\|=1$，$x\neq y$，有 $\|x-y\|=\alpha>0$，由平行四边形公式，有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= 2(\|x\|^2+\|y\|^2)-\|x-y\|^2 \\ &= 2\times(1+1)-\alpha^2<4\end{aligned}$$

则 $\|x+y\|<2$，即 H是严格凸空间.

(2) 取 $x_1\equiv 1$，$x_2=\dfrac{t-a}{b-a}$，则 $x_1\neq x_2$，且 $\|x_1\|=\|x_2\|=1$. 而

$$\|x_1+x_2\| = \max_{t\in[a,b]}\left|1+\frac{t-a}{b-a}\right|=2$$

因此，$C[a, b]$是非严格凸的.

定理 5.3.2(最佳逼近的唯一性) 设 X是严格凸的线性赋范空间，$Y(\subset X)$是其子空间，$x\in X$，则 x在 Y中的最佳逼近至多有一个.

证 用反证法. 如果 x在 Y中有两个佳逼近 y，z，$y\neq z$，则

$$0<\|y-z\|\leqslant\|y-x\|+\|x-z\|=2d(x, Y)$$

于是 $d(x, Y)>0$，令 $u_1=\dfrac{1}{d(x, Y)}(x-y)$，$u_2=\dfrac{1}{d(x, Y)}(x-z)$，则有 $\|u_1\|=\|u_2\|$，$u_1\neq u_2$，由引理 5.2.1 知，$\dfrac{1}{2}(y+z)$也是 x的最佳逼近，因此，$\left\|x-\dfrac{1}{2}(y+z)\right\|=d(x, Y)$. 从而

$$\left\|\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2\right\| = \frac{1}{d(x, Y)}\left\|x-\frac{1}{2}(y+z)\right\|=1$$

即 $\|u_1+u_2\|=2$，这与 X严格凸相矛盾. □

在 Hilbert 空间 H中，Y是 H的闭子空间. 由直交投影定理可知，对于 $x\in H$，x在 Y上的直交投影 x_0 是 x在 Y中的最佳逼近. 结合定理 5.3.2 可得推论 5.3.1.

推论 5.3.1 设 H是 Hilbert空间，$Y\subset H$是闭子空间，$x\in H$，则 x在 Y中存在唯一的最佳逼近. □

下面着重讨论 $X=C[a, b]$，$Y\subset X$的最佳逼近问题.

定义 5.3.3 (1)**(极值点)**. 设 $x\in C[a, b]$，$t_0\in[a, b]$，如果

$$|x(t_0)| = \|x\|$$

则称 t_0 是 x 的一个极值点；

（2）**（哈尔(Haar)条件）**. 设 Y 是 $C[a, b]$ 的 n 维子空间. 如果 $\forall y \in Y$，$y \neq 0$，y 在 $[a, b]$ 上至多有 $n-1$ 个零点，则称 Y 满足 Haar 条件.

引理 5.3.2（充要条件） 设 $Y \subset C[a, b]$ 是 n 维子空间，$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 是 Y 的任一组基，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是 $[a, b]$ 上任意 n 个不同的点，定义矩阵

$$K = (k_{ij})_{i, j=1, 2, \cdots, n} = (y_i(t_j))_{i, j=1, 2, \cdots, n} \tag{5.3-4}$$

则 Y 满足 Haar 条件 $\Longleftrightarrow$ K 的行列式 $\det K \neq 0$.

证 $\forall y \in Y$，则 y 可唯一表示为 $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$. 子空间 Y 满足 Haar 条件 $\Longleftrightarrow$ 对每一个 $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$，若在 $[a, b]$ 中有 n 个或多于 n 个零点 $t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots$，则 $y=0$，即线性方程组

$$y(t_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k(t_j) = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{5.3-5}$$

有唯一零解 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$，而方程组(5.3-5)只有零解 $\Longleftrightarrow \det K \neq 0$. $\square$

引理 5.3.3 设 Y 是实 Banach 空间 $C[a, b]$ 的 n 维子空间，Y 满足 Haar 条件；$x \in C[a, b]$，$y \in Y$，如果 $x - y$ 在 $[a, b]$ 上的极值点的个数少于 $n+1$ 个，则 y 不是 x 在 Y 中的最佳逼近.

证 （初学者可以跳过此证明）. 设 $v = x - y$ 在 $[a, b]$ 上有 $m (m \leqslant n)$ 个极值点 $t_1, t_2, \cdots, t_m$，若 $m < n$，则可选 $t_{m+1}, \cdots, t_n \in [a, b]$，不同于 $t_1, \cdots, t_m$. 取 Y 的任一组基 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，构造非齐次线性方程组

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k y_k(t_j) = v(t_j) \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{5.3-6}$$

其中 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是未知数，因 Y 满足 Haar 条件，由引理 5.3.1 知方程组(5.3-6)有唯一解 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$. 作 $y_0 \in Y$，

$$y_0 = \sum_{k=1}^{n} \beta_k y_k$$

$\forall \varepsilon > 0$，令 $\tilde{y} = y + \varepsilon y_0$，下面证明：当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，函数 $\tilde{v} = x - \tilde{y}$ 满足

$$\|\tilde{v}\| < \|v\| \tag{5.3-7}$$

从而 y 不是 x 在 Y 中的最佳逼近.

下面证明(5.3-7)式，对每个 $t_i (i=1, 2, \cdots, m)$，存在 t_i 的充分小邻域 $O(t_i)$，记 $N = \bigcup_{i=1}^{m} O(t_i)$，令 $M = [a, b] \setminus N$. 由于 $v = x - y \neq 0$，故对 v 的每个极值点 $t_i (i=1, 2, \cdots, m)$，有 $|v(t_i)| = \|v\| > 0$. 再由 y_0 的定义知，$y_0(t_i) = v(t_i) (i=1, 2, \cdots, m)$；由于连续函数的性质，可取 t_i 的邻域 $O(t_i)$ 充分小. 使

$$\mu = \inf_{t \in N} |v(t)| > 0 \quad \text{且} \quad \inf_{t \in N} |y_0(t)| \geqslant \frac{1}{2}\|v\|$$

由于 $y_0(t_i) = v(t_i) = \|v\| \neq 0 (i=1, 2, \cdots, m)$，故 $\forall t \in N$，$y_0(t)/v(t) > 0$；从而

$$\frac{y_0(t)}{v(t)} = \frac{|y_0(t)|}{|v(t)|} \geqslant \frac{\inf_{t \in N} |y_0(t)|}{\|v\|} \geqslant \frac{1}{2} \tag{5.3-8}$$

记 $K_0=\sup_{t\in N}|y_0(t)|$，则对每个 $\varepsilon\in(0,\mu/K_0)$及 $t\in N$，有

$$\frac{\varepsilon y_0(t)}{v(t)}=\frac{\varepsilon|y_0(t)|}{|v(t)|}\leqslant\frac{\varepsilon K_0}{\mu}<1 \tag{5.3-9}$$

因为 $\tilde{v}=x-\tilde{y}=x-y-\varepsilon y_0=v-\varepsilon y_0$，利用不等式(5.3-8)、(5.3-9)，则 $\forall\ t\in N$及 $0<\varepsilon<\mu/K_0$，有

$$\begin{aligned}|\tilde{v}(t)|&=|v(t)-\varepsilon y_0(t)|=|v(t)|\left(1-\frac{\varepsilon y_0(t)}{v(t)}\right)\\&\leqslant\|v\|\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\|v\|\end{aligned} \tag{5.3-10}$$

对 $M=[a,b]\setminus N$，定义

$$K_1=\sup_{t\in M}|y_0(t)|,\ K_2=\sup_{t\in M}|v(t)|$$

因为 N包含 v的所有的极值点，故 $K_2<\|v\|$，记 $\|v\|=K_2+\eta(\eta>0)$，选取 $\varepsilon\in\left(0,\frac{\eta}{K_1}\right)$，于是 $\forall\ t\in M$，有

$$\begin{aligned}|\tilde{v}(t)|&\leqslant|v(t)|+\varepsilon|y_0(t)|\leqslant K_2+\varepsilon K_1\\&<K_2+\eta=\|v\|\end{aligned} \tag{5.3-11}$$

取 $0<\varepsilon<\min\left(\frac{\mu}{K_0},\frac{\eta}{K_1}\right)$，结合(5.3-10)、(5.3-11)式，可知(5.3-7)式成立. □

定理5.3.3(Haar唯一性定理) 设 Y是 Banach 空间 $C[a,b]$的 n维子空间，$x\in C[a,b]$，则 x在 Y有唯一最佳逼近$\Longleftrightarrow Y$满足 Haar 条件.

证 (初学者可以跳过此证明). $\Leftarrow$ 设 Y满足 Haar 条件，$y_1,y_2\in Y$是 x在 Y中的最佳逼近. 令 $v_1=x-y_1$，$v_2=x-y_2$，则有 $\|v_1\|=\|v_2\|=d(x,Y)$. 由引理5.3.1知，$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$也是 x在 Y中的最佳逼近. 根据引理5.3.3，函数 $v=x-y=x-\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(v_1+v_2)$至少有 $n+1$ 个极值点：$t_1,t_2,\cdots,t_{n+1}$，在这些点处有$|v(t_i)|=\|v\|=d(x,Y)$，故

$$2v(t_i)=v_1(t_i)+v_2(t_i)=2d(x,Y)(\text{或}-2d(x,Y)) \tag{5.3-12}$$

又$|v_1(t_i)|\leqslant\|v_1\|=d(x,Y)$，$|v_2(t_i)|\leqslant\|v_2\|=d(x,Y)$. 因此，欲使(5.3-12)式成立，只有一种可能，即

$$v_1(t_i)=v_2(t_i)=d(x,Y)(\text{或}-d(x,Y))\qquad i=1,2,\cdots,n+1$$

这就意味着 $y_1-y_2=v_2-v_1$ 在$[a,b]$上具有 $n+1$ 个零点，根据 Haar 条件可知 $y_1-y_2=0$，则 $y_1=y_2$. 唯一性得证.

$\Rightarrow$ 用反证法. 设 Y不满足 Haar 条件，只要证明存在 $x\in C[a,b]$，x在 Y的最佳逼近不唯一即可. 如果 Y不满足 Haar 条件，则存在 Y的一组基$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$及$[a,b]$上 n个不同的点 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，使得 $\det K=0$(其中 $K=(y_i(t_j))_{i,j=1,2,\cdots,n}$)，所以齐次线性方程组

$$\alpha_1y_1(t_i)+\alpha_2y_2(t_i)+\cdots+\alpha_ny_n(t_i)=0\qquad i=1,2,\cdots,n$$

有非零解$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$；应用这一解以及任何 $y=\sum_{i=1}^{n}\beta_iy_i\in Y$，都有

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y(t_j)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left[\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_i(t_j)\right]=0 \tag{5.3-13}$$

此外，被转置的齐次方程组

$$\gamma_1 y_1(t_j)+\gamma_2 y_2(t_j)+\cdots+\gamma_n y_n(t_j)=0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

也有非零解$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$；利用这一解定义 $y_0=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i y_i$，则 $y_0\in Y$，$y_0\neq 0$，且 $y_0(t_j)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i y_i(t_j)=0$，$j=1,2,\cdots,n$. 取 $\lambda\in\mathbf{R}^1$，使 $\|\lambda y_0\|\leqslant 1$；再取 $z\in C[a,b]$，使 $\|z\|=1$，且满足

$$z(t_i)=\operatorname{sgn}\alpha_i=\begin{cases}-1 & \text{当 } \alpha_i<0\\ 1 & \text{当 } \alpha_i\geqslant 0\end{cases}$$

定义 $x\in C[a,b]$为

$$x(t)=z(t)[1-|\lambda y_0(t)|]$$

显见 $x(t_i)=z(t_i)=\operatorname{sgn}\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\|x\|=1$. 对任意 $t\in[a,b]$，$|z(t)|\leqslant\|z\|=1$，$|\lambda y_0(t)|\leqslant\|\lambda y_0\|\leqslant 1$；则 $\forall\varepsilon\in[-1,1]$，都有

$$\begin{aligned}|x(t)-\varepsilon\lambda y_0(t)|&\leqslant|x(t)|+|\varepsilon\lambda y_0(t)|=|z(t)|(1-|\lambda y_0(t)|)+|\varepsilon\lambda y_0(t)|\\&\leqslant 1-|\lambda y_0(t)|+|\varepsilon\lambda y_0(t)|=1-(1-|\varepsilon|)|\lambda y_0(t)|\leqslant 1\end{aligned} \tag{5.3-14}$$

由(5.3-14)式可知，只要能证明 $d(x,Y)\geqslant 1$，则可知：$\forall\varepsilon\in[-1,1]$，$\varepsilon\lambda y_0$ 都是 x在 Y中的最佳逼近，即 x的最佳逼近不唯一.

下证 $d(x,Y)\geqslant 1$，应用反证法，若存在 $\tilde{y}\in Y$，使 $\|x-\tilde{y}\|<1$，那么由条件

$$x(t_i)=\operatorname{sgn}\alpha_i=\pm 1$$
$$|x(t_i)-\tilde{y}(t_i)|\leqslant\|x-\tilde{y}\|<1 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

推得，对所有 $\alpha_i\neq 0$，均有

$$\operatorname{sgn}\tilde{y}(t_i)=\operatorname{sgn}x(t_i)=\operatorname{sgn}\alpha_i$$

从而有

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\tilde{y}(t_j)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j|\tilde{y}(t_j)|\operatorname{sgn}\alpha_j=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j||\tilde{y}(t_j)|\neq 0$$

(因为 α_j不全为零，而 $x(t_j)=\pm 1$，$|x(t_j)-\tilde{y}(t_j)|<1$，所以 $\tilde{y}(t_j)\neq 0$)这与(5.3-13)式相矛盾，因此 $d(x,Y)\geqslant 1$. □

推论 5.3.2 设 Y_n是实 Banach 空间 $C[a,b]$中由 $y=0$(对此不定义方次)及次数不超 n次多项式构成 $C[a,b]$的 $n+1$ 维子空间，则 $\forall x\in C[a,b]$，x在 Y_n中存在唯一的最佳逼近.

证 由于对任何 $y\in Y_n$，y是$[a,b]$上次数不超过 n的多项式，由代数基本定理，$y=0$在$[a,b]$上的解(即零点)最多有 n个，所以 Y_n满足 Haar 条件，再根据定理 5.3.3 便得结论. □

在以上理论分析的基础上，下面讨论如何确定 $x\in C[a,b]$的最佳逼近函数 $y\in Y$. 一般而言，只有少数的函数 $x\in C[a,b]$，才能确定其最佳逼近. 下面我们主要讨论 $x(t)=t^n(-1\leqslant t\leqslant 1)$在 $Y_n=\operatorname{span}\{1,t,\cdots,t^{n-1}\}$中的最佳逼近. 先给出如下的定义.

定义 5.3.4(交错集) 设 Y 是 $C[a,b]$ 的子空间，$x\in C[a,b]$，$y\in Y$，如果 $[a,b]$ 中的点集 $\{t_0,t_1,\cdots,t_k\}$，满足：$t_0<t_1<\cdots<t_k$，且使得函数 $x-y$ 在这些点的值 $x(t_j)-y(t_j)$ $(j=0,1,2,\cdots,k)$ 依次交错地等于 $\|x-y\|$ 和 $-\|x-y\|$，则称 $\{t_0,t_1,\cdots,t_k\}$ 是 $x-y$ 的一个交错集.

显然，交错集中的 $k+1$ 个点都是 $x-y$ 的极值点，并且在这些点函数交错地取最大值与最小值.

引理 5.3.4 设 $Y\subset C[a,b]$ 是 n 维子空间，且满足 Haar 条件，$x\in C[a,b]$，$y\in Y$，如果 $x-y$ 在 $[a,b]$ 上有包含 $n+1$ 个点的交错集，则 y 是 x 在 Y 中的最佳逼近.

证 根据定理 5.3.3 知，x 在 Y 中有唯一的最佳逼近. 设 y_0 是 x 在 Y 中的最佳逼近，如果 $y\neq y_0$，则有

$$\|x-y\|>\|x-y_0\|$$

这个不等式意味着，在 $n+1$ 个极值点上，函数

$$y_0-y=(x-y)-(x-y_0)$$

和 $x-y$ 有相同的符号. 这是因为在这些点处，$x-y$ 等于 $\pm\|x-y\|$，而 $x-y_0$ 在这些点处的值不超过 $\|x-y_0\|$，从而严格小于 $\|x-y\|$. 这就是说，y_0-y 在 $x-y$ 的交错集上的取值($n+1$ 个函数值)也依次地为正和负，所以 $y-y_0$ 在 $[a,b]$ 上至少有 n 个零点(介值定理). 由于 $y-y_0\in Y$，且 Y 满足 Haar 条件，故 $y-y_0=0$，与 $y\neq y_0$ 矛盾. 所以 $y=y_0$，从而证明 y 是 x 在 Y 中的最佳逼近. □

作为引理 5.3.4 的应用，讨论 $x(t)=t^n\in C[-1,1]$，在 $Y_n=\text{span}\{1,t,\cdots,t^{n-1}\}$ 中的最佳逼近.

解 取

$$y(t)=\alpha_{n-1}t^{n-1}+\alpha_{n-2}t^{n-2}+\cdots+\alpha_0\in Y_n$$

令 $z=x-y$，则有

$$z(t)=t^n-(\alpha_{n-1}t^{n-1}+\alpha_{n-2}t^{n-2}+\cdots+\alpha_0)$$

根据引理 5.3.4，要使 $y\in Y_n$ 是 $x=t^n$ 的最佳逼近，只要选取适当 $y\in Y_n$，使 $z=x-y$ 在 $[-1,1]$ 上具有 $n+1$ 个点的交错集就可以了.

为了确定 $z(t)$ 的结构形式，让我们回忆一下三角函数 $z=\cos n\theta$ 的简单性质. 显然这个函数在 $n+1$ 个点，$\theta_k=\dfrac{k\pi}{n}(k=0,1,\cdots,n)$ 处依次改变符号，并使 $|\cos n\theta_k|$ 达到最大值 1. 另一方面，又知道 $\cos n\theta$ 可以展成 $\cos\theta$ 的 n 次多项式(有穷级数). 这样，只要我们令 $\cos\theta=t$，则 $\cos n\theta$ 便成了 t 的 n 次多项式，记为 $T_n(t)$，则有

$$z(t)=T_n(t)=\cos(n\arccos t)$$

就是 t 的 n 次多项式，并称 $T_n(t)$ 是第一类的 n 阶的契比雪夫(Tchebichef)多项式，$T_n(t)$ 有 $n+1$ 个元素的交错集 $t_k=\cos\dfrac{k\pi}{n}\in[-1,1]$，$(k=0,1,2,\cdots,n)$.

这样，我们基本解决了 $z(t)$ 的构造问题. 唯一剩下的工作就是选取适当的常数 C_n，使 $C_nT_n(t)=C_n\cos(n\arccos t)$ 中 t^n 系数为 1 就可以了. 注意到

$$\cos n\theta=\frac{1}{2}(e^{in\theta}+e^{-in\theta})=\frac{1}{2}[(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^n+\left(t-\sqrt{t^2-1}\right)^n\right]$$

$$\frac{\cos n\theta}{t^n} = \frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\right)^n+\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\right)^n\right]$$

令 $t\to\infty$，有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\cos n\theta}{t^n} = 2^{n-1}$$

即 $\cos(n\arccos t)$的 t^n 的系数为 2^{n-1}，取 $C_n=(2^{n-1})^{-1}$，得

$$x(t) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos t) \tag{5.3-15}$$

即

$$x(t) = \frac{1}{2^n}\left[\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^n+\left(t-\sqrt{t^2-1}\right)^n\right] \tag{5.3-16}$$

通常记 $\widetilde{T}_n(t)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(t)$——最高次系数 1 的 Tchebichef 多项式．根据引理 5.3.4，我们有下面定理．

定理 5.3.4(契比雪夫(Tchebichef)定理)　多项式

$$\widetilde{T}_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos t) \qquad n\geqslant 1$$

在所有最高次系数为 1 的 n次多项式中是函数 $x\equiv 0$ 的最佳逼近． □

推论 5.3.3　函数 $x(t)=t^n\in C[-1,1]$在 $Y_n=\mathrm{span}\{1,t,\cdots,t^{n-1}\}$中的最佳逼近是

$$y(t) = x(t)-\frac{1}{2^{n-1}}T_n(t) \tag{5.3-17}$$

□

注意(5.3-17)式中的最高次项消掉了，$y(t)$是 Y_n 中的多项式(次数不超过 $n-1$)．

如果 $\tilde{x}(t)=\beta_n t^n+\beta_{n-1}t^{n-1}+\cdots+\beta_0$ 是 n次多项式($\beta_n\neq 0$)，令 $x(t)=\frac{1}{\beta_n}\tilde{x}$，则 x是最高次系数为 1 的多项式，由定理 5.3.4 知，如果 $\tilde{y}\in Y_n$ 是 $\tilde{x}$ 的最佳逼近，则

$$\frac{1}{\beta_n}(\tilde{x}-\tilde{y}) = \widetilde{T}_n(t)$$

即

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}-\frac{\beta_n}{2^{n-1}}T_n(t) \qquad n\geqslant 1$$

推论 5.3.4　设 $\tilde{x}(t)$是$[-1,1]$上的 n次多项式，其最高次系数 $\beta_n\neq 0$，则 $\tilde{x}(t)$在 $Y_n=\mathrm{span}\{1,t,\cdots,t^{n-1}\}$中的最佳逼近为

$$\tilde{y} = \tilde{x}-\frac{\beta_n}{2^{n-1}}T_n(t) \tag{5.3-18}$$

下面我们来计算 $T_n(t)$的表达式．根据三角恒等式

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta-\cos(n-1)\theta \qquad n=1,2,3,\cdots$$

作变量代换 $\theta=\arccos t$，可以导出以下的递推公式：

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t)-T_{n-1}(t) \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{5.3-19}$$

注意 $T_0(t)=1$，$T_1(t)=t$，反复应用(5.3-19)式，可得

$$T_0(t)=1$$
$$T_1(t)=t$$
$$T_2(t)=2t^2-1$$
$$T_3(t)=4t^3-3t$$
$$T_4(t)=8t^4-8t^2+1$$
$$T_5(t)=16t^5-20t^3+5t$$
$$T_6(t)=32t^6-48t^4+18t^2-1$$
$$\cdots$$

一般公式是

$$T_n(t)=\frac{n}{2}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^j\frac{(n-j-1)!}{j!(n-2j)!}(2t)^{n-2j}\qquad n=1,2,3,\cdots,\quad(5.3-20)$$

其中$\left[\frac{n}{2}\right]$是$\frac{n}{2}$的整数部分，在 $n=2k$(偶数)时，取$\left[\frac{n}{2}\right]=k$，在 $n=2k-1$(奇数)时，取$\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}=k-1$. 为了获得一个更具体的印象，图 5－3 给出定义在[－1，1]上前六个 Tchebichef 多项式 $T_n(t)$的图形($n=1,2,\cdots,6$).

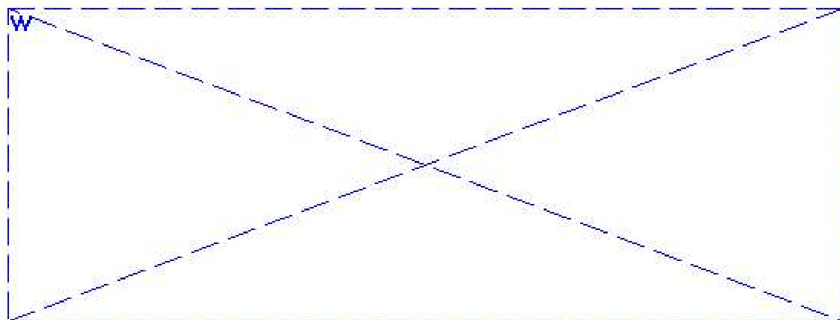


图 5－3

5.3.2 希尔伯特空间中的最佳逼近

设 H是 Hilbert 空间，Y是 H的闭子空间，由推论 5.3.1 知，$\forall x\in H$，x在 Y中存在唯一的最佳逼近 x_0. 再由定理 3.3.3(投影定理)知，

$$x=x_0+z\qquad(5.3-21)$$

$x_0\in Y$，而 $z\in Y^{\perp}$. 这里 z反映了逼近所产生的误差.

如果 Y是 H的 m维子空间，设$\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$是 Y的一组基，则容易求得最佳逼近 x_0 的表示式及逼近误差的估计.

设 x_0 在 Y中可用基$\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$唯一表示为

$$x_0=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i\qquad(5.3-22)$$

因为 $z=(x-x_0)\perp Y$，故有

$$(y_i, x-x_0)=\left(y_i, x-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i\right)=0 \qquad i=1, 2, \cdots, m$$

由此可得 m 个未知量 α_1, α_2, $\cdots$, α_m 的 m 个方程的线性方程组

$$\bar{\alpha}_1(y_i, y_1)+\bar{\alpha}_2(y_i, y_2)+\cdots+\bar{\alpha}_m(y_i, y_m)=(y_i, x) \qquad i=1, 2, \cdots, m \tag{5.3-23}$$

方程组(5.3-23)的系数由 Y 的基$\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$确定，其系数行列式为

$$G(y_1, y_2, \cdots, y_m)=\begin{vmatrix}(y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \cdots & (y_1, y_m)\\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \cdots & (y_2, y_m)\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ (y_m, y_1) & (y_m, y_2) & \cdots & (y_m, y_m)\end{vmatrix} \tag{5.3-24}$$

并称 $G(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 为 y_1, y_2, $\cdots$, y_m 的格拉姆(Gram)行列式，简记为 G. 由于对任何 $x\in H$, 方程组(5.3-23)都有唯一解，故 $G\neq 0$，于是，方程组(5.3-23)的解为

$$\bar{\alpha}_i=\frac{G_i}{G} \qquad i=1, 2, \cdots, m \tag{5.3-25}$$

其中，G_i 是 G 中第 i 列用$((y_1, x), (y_2, x), \cdots, (y_m, x))^{\mathrm{T}}$代替所得到的行列式，这样，$x_0$ 就被确定了.

下面，我们考虑 x_0 逼近 x 所产生的误差，即考虑 $\|x-x_0\|=\|z\|$. 为此，先给出以下引理.

引理 5.3.5(线性无关) Hilbert 空间中的一组元素$\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$线性无关$\Longleftrightarrow y_1$, y_2, $\cdots$, y_m 的 Gram 行列式 $G(y_1, y_2, \cdots, y_m)\neq 0$.

证 $\Rightarrow$ 在(5.3-5)式的讨论中已证.

$\Leftarrow$ 应用反证法. 如果 y_1, y_2, $\cdots$, y_m 是线性相关的，则其中至少有一元素 y_{i_0} 是其它元素的线性组合，因而 G 中的第 i_0 列是其它各列的线性组合，于是 $G=0$，这与 $G\neq 0$ 矛盾，故$\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$是线性无关的. □

如果 x_0 是 x 在 Y 中的最佳逼近，$z=x-x_0$，由于 $z\perp Y$, $(x_0, z)=(x_0, x-x_0)=0$，则有

$$\begin{aligned}\|z\|^2&=(z, z)+(x_0, z)\\ &=(x-x_0, x-x_0)+(x_0, x-x_0)\\ &=(x, x-x_0)\\ &=(x, x)-\left(x, \sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i\right)\end{aligned}$$

上式可改写为

$$(x, x)-\|z\|^2-\sum_{i=1}^{m}\bar{\alpha}_i(x, y_i)=0 \tag{5.3-26}$$

再联立 $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, $\cdots$, $\bar{\alpha}_m$ 所满足的 m 个方程组(5.3-23)

$$(y_j, x)-\sum_{i=1}^{m}\bar{\alpha}_i(x, y_i)=0 \qquad j=1, 2, \cdots, m \tag{5.3-27}$$

方程组(5.3-26)、(5.3-27)式合在一起得到包含 1 在内的 $m+1$ 个未知数 1, $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, $\cdots$, $\bar{\alpha}_m$ 的 $m+1$ 个方程的齐次线性方程组. 该方程组有非零解，故它的系数行列式必为零，即

$$\begin{vmatrix} (x, x) - \|z\|^2 & (x, y_1) & (x, y_2) & \cdots & (x, y_m) \\ (y_1, x) - 0 & (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \cdots & (y_1, y_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ (y_m, x) - 0 & (y_m, y_1) & (y_m, y_2) & \cdots & (y_m, y_m) \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.3-28)$$

把此行列式按第一列分成两个行列式之和，并将第二个行列式按行一行展开，于是(5.3-28)可以写成

$$G(x, y_1, \cdots, y_m) - \|z\|^2 G(y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0 \qquad (5.3-29)$$

其中 $G(x, y_1, \cdots, y_m)$表示行列式

$$\begin{vmatrix} (x, x) & (x, y_1) & (x, y_2) & \cdots & (x, y_m) \\ (y_1, x) & (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \cdots & (y_1, y_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ (y_m, x) & (y_m, y_1) & (y_m, y_2) & \cdots & (y_m, y_m) \end{vmatrix} \qquad (5.3-30)$$

由于 $G\neq 0$，故有

$$\|z\|^2 = \frac{G(x, y_1, \cdots, y_m)}{G(y_1, \cdots, y_m)} \qquad (5.3-31)$$

特别地，如果选取的 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 是 Y 的标准正交基，则有 $G=1$，并把 $G(x, y_1, \cdots, y_m)$按第一行展开，注意到$(x, y_i)\cdot(y_i, x)=|(x, y_i)|^2$，则(5.3-31)式为

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{m} |(x, y_i)|^2 \qquad (5.3-32)$$

定理 5.3.5(误差) 设 H 是 Hilbert 空间，Y 是 H 的 m 维子空间，$\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ 是 Y 的一组基，$x\in H$，x_0 是 x 在 H 中的最佳逼近，$z=x-x_0$，则

$$\|z\|^2 = \frac{G(x, y_1, \cdots, y_m)}{G(y_1, \cdots, y_m)}$$

特别地，如果 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 是 Y 的标准正交基，则

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{m} |(x, y_i)|^2$$

例 5.3.5 在 Hilbert 空间 $L^2[-\pi, \pi]$，由标准正交基

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos mt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mt}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

张成 $L^2[-\pi, \pi]$的 $2m+1$ 维子空间，在 $L^2[-\pi, \pi]$中定义 f、g 的内积为

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \, dt$$

则有

$$\left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} a_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0$$

$$\left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kt \, dx = \sqrt{\pi} a_k$$

$$\left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kt \, dx = \sqrt{\pi} b_k \qquad k = 1, 2, \cdots, m$$

其中，a_0，a_1，…，a_m，…；b_1，…，b_m，…是 f 的 Fourier 系数．$f(t)$ 在 Y 中的最佳逼近就是 f 的 Fourier 级数的前 $2m+1$ 项，即

$$f_0(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{m}(a_k\cos kt+b_k\sin kt) \tag{5.3-33}$$

而 $f_0(t)$ 到 $f(t)$ 的距离由(5.3－32)式给出，有

$$\|z\|^2=\|f\|^2-\pi\left[\frac{a_0^2}{4}+\sum_{k=1}^{m}(a_k^2+b_k^2)\right] \tag{5.3-34}$$

习 题 五

1. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续可微函数，且满足条件

$$|f'(x)|\leqslant\alpha<1,\quad |x|<+\infty$$

证明：对任何初值 x_0，序列

$$x_{n+1}=f(x_n)\qquad n=0,1,2,\cdots$$

收敛到方程 $x=f(x)$ 的唯一解 x^*，且有几何级数的收敛速率：

$$|x_n-x^*|\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}|f(x_0)-x_0|$$

2. 在 Banach 不动点定理中，当 $x\neq y$ 时，条件(5.1－4)式不能用 $d(Ax,Ay)<d(x,y)$ 代替，考察例子：$X=\{x|1\leqslant x<+\infty\}$，并取实轴上通常的度量，定义映射 A：$X\to X$ 为 $Ax=x+\frac{1}{x}$．证明：当 $x\neq y$ 时，$|Ax-Ay|<|x-y|$，但映射没有不动点．

3. 若 $f(x)$ 在区间 $J=[a,b]$ 上具有连续导数，且 $f(a)<0$，$f(b)>0$，$0<k_1\leqslant f'(x)\leqslant k_2$ $(x\in J)$，试选一适当的常数 λ，利用函数 $g(x)=x-\lambda f(x)$ 建立一迭代过程，以求方程 $f(x)=0$ 的解．

4. 设 X 是完备的距离空间，A：$X\to X$ 满足

$$a_n=\sup_{x,y\in X}\frac{d(A^nx,A^ny)}{d(x,y)}\to 0\qquad n\to\infty$$

证明：A 在 X 中有唯一的不动点．

5. 设 F 是 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集，A：$F\to F$，对任何 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in F$，当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ 时，有

$$d(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})<d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

求证：A 在 F 中存在唯一不动点．

6. 如果条件 $\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|<1$ 成立，证明：无穷代数方程组

$$x_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j+b_i\qquad i=1,2,3,\cdots$$

对于任意序列 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots)\in l^\infty$，必有唯一解 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^\infty$．

7. (Newton 法)．设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的二次连续可微的实值函数，x^* 是 f 在 (a,b) 内的单重零点，试用压缩映射原理证明：当初值 x_0 充分靠近 x^* 时，由关系式

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

所定义的迭代序列收敛于 x^*.

8. 选 $x_0 = v$, 用迭代法解下列积分方程:

$$x(t) - \mu\int_0^1 e^{t-\tau} x(\tau)\, d\tau = v(t) \qquad |\mu| < 1$$

9. 若(X, d)是度量空间，Y是 X 一紧子集，则 Y 中对每一 $x \in X$, 均有一最佳逼近.

10.（凸函数）. 函数 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ 称为凸的，若它的定义域 $D(f)$是凸集，而且对所有 u, $v \in D(f)$，有

$$f(\lambda u + (1-\lambda) v) \leqslant \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v) \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

设 Y是线性赋范空间 X 的有限维子空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是 Y的一组基，对于固定的 $x \in X$, 定义函数 f 为

$$f(x) = \| x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \| \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

证明函数 f 为凸的.

11. 证明：若一范数是严格凸的，则 $\|x\| = \|y\| = 1$ 且 $x \neq y$ 蕴涵对所有 $0 < \alpha < 1$, 有

$$\| \alpha x + (1-\alpha) y \| < 1$$

并证明这一条件对严格凸性也是充分的.

12. 设 $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t^2$, 若 $Y = \text{span}\{x_1, x_2\}$看成：

(1) $C[0, 1]$的子空间，

(2) $C[-1, 1]$的子空间，

问 Y满足Haar条件吗？

13. 证明：n维空间 $Y = \text{span}\{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \subset C[a, b]$, 满足Haar条件，当且仅当任意 n个不同的 $t_j \in [a, b]$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, n个向量

$$v_j = (y_1(t_j), \cdots, y_n(t_j)) \qquad j = 1, 2, 3, \cdots, n$$

成一线性无关集.

14. 求 $x(t) = t^3 + t^2$, $t \in [-1, 1]$的二次多项式的最佳逼近 y_0, 其最大偏差是多少？

15. 用 Gram 行列式表示 Schwarz 不等式：$|(x, y)| \leqslant \|x\| \|y\|$，并利用引理5.3.5求出等号成立的条件.

16. 证明 $G(y_1, y_2, \cdots, y_n) \geqslant 0$. 由此可得下述命题：Hilbert 空间 H的有限子集为线性无关$\Longleftrightarrow$其元素的 Gram 行列式为正值.

第六章　线性算子谱论初步

谱论是泛函分析的一个重要分支．它起源于线性方程(代数方程、微分方程、积分方程等)的特征理论．将它推广到抽象空间上的线性算子，就是线性算子的谱理论．谱论在现代科学技术中有着广泛的应用．目前，对算子谱的研究已相当深入．本章只对谱论的基本概念、基本性质及一些简单线性算子的谱及应用作一简要介绍．

6.1　线性算子谱的概念与性质

6.1.1　基本概念

在线性代数、微分方程、积分方程等许多数学问题中，经常需要求解齐次方程

$$(T-\lambda I)x=0 \tag{6.1-1}$$

及非齐次方程

$$(T-\lambda I)x=f \tag{6.1-2}$$

对于方程(6.1－1)要考虑：对于什么样的 λ，方程(6.1－1)只有零解，对于什么样的 λ，方程有非零解；对于方程(6.1－2)要考虑：在什么条件下方程有唯一解，并且这样的解连续地依赖于 f．这里 T是给定的算子，I是恒等算子，f是已知向量，x是未知向量．

例如，设 T是 $\boldsymbol{C}^n\to\boldsymbol{C}^n$ 的线性算子，对于 $\boldsymbol{C}^n$ 内选定一组基，则 T可以用 $n\times n$矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$来表示，这时方程(6.1－1)对应的方程为

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{6.1-3}$$

这里 $\boldsymbol{I}$表示 $n\times n$单位矩阵．

如果 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\neq 0$，则方程(6.1－3)只有零解．此时，相应的非齐次方程

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{6.1-4}$$

有唯一解 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{b}$．

如果 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$，则方程(6.1－3)有非零解．此时，方程(6.1－4)并非对任何 $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{C}^n$ 都有解，即使有解，其解也不唯一．在这种情况下，$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})$的逆不存在．在线性代数中，称方程

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0 \tag{6.1-5}$$

为算子 T(或矩阵 $\boldsymbol{A}$)的特征方程．满足方程(6.1－5)的 λ为算子 T(或矩阵 $\boldsymbol{A}$)的特征根．当 λ是特征根时，方程(6.1－3)的任一非零解都是 T(或 $\boldsymbol{A}$)的特征向量．

以上是有限维空间的情况，问题比较简单，对于无穷维的抽象空间，问题会复杂的多．因此，有必要把线性代数中这一方面的基本概念推广到无穷维的抽象空间中去．泛函分析

中线性算子的谱理论就是研究这方面的问题.

设 $X\neq\{0\}$为一复的线性赋范空间，$T: D(T)(\subset X)\to X$是线性算子，$D(T)$是 T的定义域，$R(T)\subset X$是 T的值域. 当 T是 $D(T)$到 $R(T)$上的一一映射时，记 T的逆映射为 T^{-1}，而且 T^{-1}是 $R(T)$到 $D(T)$的线性映射. 很明显，T^{-1}存在$\Longleftrightarrow N(T)=\{0\}$. 这里 $N(T)$是 T的零空间. 如果 $D(T)=R(T)=X$时，T^{-1}就是 $T: X\to X$的逆算子. 对于给定的线性算子 T，记 $T_\lambda=T-\lambda I$，I是 $D(T)$到它自身的恒等算子. 如果存在 T_λ^{-1}，记 $R_\lambda(T)=T_\lambda^{-1}=(T-\lambda I)^{-1}$. $R_\lambda(T)$有时也简记为 R_λ，并称 R_λ是 T的预解算子(或 T的预解式).

定义 6.1.1 设 X是非零的复线性赋范空间，$T: D(T)(\subset X)\to X$是线性算子，若复数 λ满足：

(1) $R_\lambda(T)=(T-\lambda I)^{-1}$存在， (6.1-6)

(2) $R_\lambda(T)$是有界算子， (6.1-7)

(3) $R_\lambda(T)$的定义域(T_λ的值域 $R(T_\lambda)$)在 X中稠密，即

$$\overline{R(T_\lambda)}=X \tag{6.1-8}$$

则称 λ是 T的正则值. T的全部正则值的集合叫做 T的预解集，记为 $\rho(T)$. 数集 $C\setminus\rho(T)$叫做 T的谱集，记为 $\sigma(T)$.

定义 6.1.2(谱的类型) 谱集 $\sigma(T)$中的元素可分为三种类型：

(1) **点谱**. 使 $R_\lambda(T)=(T-\lambda I)^{-1}$不存在的 λ的全体叫做 T的点谱，记为 $\sigma_p(T)$，$\lambda\in\sigma_p(T)$称为 T的特征值，$\sigma_p(T)$可表示为

$$\sigma_p(T)=\{\lambda\in\sigma(T)\mid 条件(6.1-6)不成立\} \tag{6.1-9}$$

(2) **连续谱**. 使 $R_\lambda(T)$存在，且$\overline{R(T_\lambda)}=X$，但使 $R_\lambda(T)$无界的 λ的全体称为 T的连续谱，记为 $\sigma_c(T)$，即

$$\sigma_c(T)=\{\lambda\in\sigma(T)\mid 条件(6.1-6),(6.1-8)成立，而条件(6.1-7)不成立\} \tag{6.1-10}$$

(3) **剩余谱**. 使 $R_\lambda(T)=(T-\lambda I)^{-1}$存在，且 $R_\lambda(T)$的定义域在 X中不稠密的 λ的全体称为 T的剩余谱，记为 $\sigma_r(T)$，即

$$\sigma_r(T)=\{\lambda\in\sigma(T)\mid 条件(6.1-6)成立，条件(6.1-8)不成立\} \tag{6.1-11}$$

由定义显见：$\rho(T)$与 $\sigma(T)$互斥；$\sigma_p(T)$、$\sigma_c(T)$、$\sigma_r(T)$两两互斥，并且有

$$C=\rho(T)\cup\sigma(T) \tag{6.1-12}$$

$$\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T) \tag{6.1-13}$$

把定义 6.1.1 和定义 6.1.2 中的条件列入下表：

满足	不满足	λ属于
(6.1-6),(6.1-7),(6.1-8)		$\rho(T)$
	(6.1-6)	$\sigma_p(T)$
(6.1-6),(6.1-8)	(6.1-7)	$\sigma_c(T)$
(6.1-6)	(6.1-8)	$\sigma_r(T)$

为了便于理解谱的概念，特举以下几例.

例 6.1.1 设 $X\neq\{0\}$是有限维空间，由线性代数的特征理论可知：$\sigma(T)=\sigma_p(T)=$

$\{\lambda\in C|\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0\}$(这里算子 T 对应矩阵 $\boldsymbol{A}$)是非空有限集，即 T 的特征值集，此时 $\sigma(T)=\sigma_p(T)=\varnothing$.

例 6.1.2 在 Hilbert 空间 l^2 中，定义线性算子 $T: l^2\to l^2$ 如下：

$\forall\ x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in l^2$

$$Tx=T(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)=(0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \tag{6.1-14}$$

算子 T 称为右移算子. 显然有

$$\|Tx\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2=\|x\|^2$$

即 T 是线性有界算子，且 $x_1\neq x_2$，有 $Tx_1\neq Tx_2$，即 T 是单射，因而 $\lambda=0$ 不是 T 的特征值. 算子 $R_0(T)=T^{-1}: T(l^2)\to l^2$ 存在. 实际上，它是左移算子：

$$T^{-1}(0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \tag{6.1-15}$$

但 $R_0(T)$ 的定义域 $T(l^2)$ 不在 l^2 中稠密. 实际上，$T(l^2)$ 是由所有 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)\in l^2$，$y_1=0$ 组成的子空间. 因此 $\lambda=0$ 是 T 的谱值，但 $\lambda=0$ 不是特征值.

例 6.1.3 设 $X=C[a, b]$，其中的函数是 $[a, b]$ 上定义的复值连续函数. 考虑算子

$$(Tx)(t)=\int_a^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad x(t)\in C[a, b]$$

那么

$$(T-\lambda I)x(t)=\int_a^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau-\lambda x(t) \tag{6.1-16}$$

(1) 对任何 $\lambda\in C$，$(T-\lambda I)^{-1}$ 存在. 事实上，设 $x_0(t)\in C[a, b]$，使

$$(T-\lambda I)x_0(t)=\int_a^t x_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau-\lambda x_0(t)\equiv 0$$

当 $\lambda=0$ 时，由 $\int_a^t x_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau\equiv 0$，可得 $x_0(t)\equiv 0$；

如果 $\lambda\neq 0$，可得 $x_0(t)$ 是微分方程初值问题：

$$\lambda x_0'(t)=x_0(t),\ x_0(a)=0$$

的解. 该初值问题有唯一解 $x_0(t)\equiv 0$. 从以上讨论可知，$N(T_\lambda)=\{0\}$，从而 $T_\lambda^{-1}=R_\lambda(T)$ 存在，即 $\forall\ \lambda\in C$，条件(6.1-6)均成立(即 λ 不是 T 的特征值).

(2) 当 $\lambda\neq 0$ 时，$R_\lambda(T)$ 是有界线性算子. 令 $\lambda=1/\mu$，那么算子方程

$$(T-\lambda I)x=f \tag{6.1-17}$$

化归为 $(\mu T-I)x=\mu f$ 的形式 $(\mu\neq 0)$. 若记 $g(t)=-\mu f(t)$，把上述方程写成积分方程，可得

$$x(t)=\mu\int_a^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau+g(t) \tag{6.1-18}$$

此方程是定理 5.1.6 讨论过的 Volterra 方程的一个特例. 故 $\forall\ g(t)\in C[a, b]$ 和 $\mu\neq 0$，方程(6.1-18)的解存在且唯一. 回到方程(6.1-17)，可知，当 $\lambda\neq 0$ 时，$\forall\ f(t)\in C[a, b]$，方程(6.1-17)有唯一解. 由此可见，映射 $T-\lambda I$ 是 $C[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 的一一线性映射. 再注意到算子 $T-\lambda I$ 是有界算子，那么由逆算子定理(定理 4.4.1)便知 $R_\lambda(T)=T_\lambda^{-1}=(T-\lambda I)^{-1}$ 是有界线性算子. 因此，当 $\lambda\neq 0$ 时，条件(6.1-7)成立.

(3) 当 $\lambda\neq 0$ 时，$R_\lambda(T)$ 的定义域就是 $C[a, b]$，这已在(2)中证明过了. 因此，当 $\lambda\neq 0$

时，$R(T_\lambda)=C[a,b]$.

综合(1)、(2)、(3)可知，$\forall\ \lambda\neq 0$，则 $\lambda\in\rho(T)$，即 λ 是 T 的正则点.

最后，考虑 $\lambda=0$ 的情况，由(1)的结论已知，$\lambda=0$ 不是 T 的特征值. 当 $\lambda=0$ 时，

$$(T_0 x)(t)=\int_a^t x(\tau)\,d\tau\in\{y(t)\in C[a,b]\mid y(a)=0\}\xlongequal{\text{def}}C_0[a,b]$$

容易看出 $C_0[a,b]\subset C[a,b]$，而 $C_0[a,b]$才在 $C[a,b]$中稠密，再由 $R(T_0)\subset C_0[a,b]$，可知 $R(T_0)$不在 $C[a,b]$中稠密，即定义 6.1.2 中的条件(6.1-8)不成立，从而可知 $\lambda=0$ 是 T 的谱点，且属于剩余谱，即 $\sigma(T)=\{0\}$.

总之，$\sigma_p(T)=\varnothing$，$\sigma(T)=\varnothing$，$\sigma(T)=\{0\}$.

例 6.1.4 设 $X=l$，线性算子 T：$X\to X$由下式给出：

$$Tx=y=\left(x_1,\frac{1}{2}x_2,\cdots,\frac{1}{n}x_n,\cdots\right)$$
$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l$$

考虑 $T_\lambda=T-\lambda I$.

(1) 如果 $\lambda\in\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$，这时算子方程

$$(T-\lambda I)x=y \tag{6.1-19}$$

对于任何 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)\in l$ 有唯一解. 事实上，这时可以把方程(6.1-19)写成

$$\left((1-\lambda)x_1,\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)x_2,\cdots,\left(\frac{1}{n}-\lambda\right)x_n,\cdots\right)=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

的形式，比较坐标可得

$$x_1=\frac{y_1}{1-\lambda},\cdots,x_n=\frac{y_n}{n^{-1}-\lambda},\cdots \tag{6.1-20}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n^{-1}-\lambda}\right|=|\lambda|^{-1}>0$，可知存在 $M>0$，使$\left|\frac{1}{n^{-1}-\lambda}\right|\leqslant M$，所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\leqslant M\sum_{n=1}^{\infty}|y_n| \tag{6.1-21}$$

即对每一 $y\in l$，方程(6.1-19)在 l 中有唯一解((6.1-20)式). $R_\lambda(T)=(T-\lambda I)^{-1}$存在，有界(由(6.1-21)式)，且在 l 上均有定义. 由定义可知 λ 是 T 的正则值，即 $\lambda\in\rho(T)$.

(2) 如果 $\lambda\in\left\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$，设 $\lambda=\frac{1}{n}$，这时齐次方程

$$\left(T-\frac{1}{n}\lambda\right)x=0 \tag{6.1-22}$$

写成向量形式是

$$\left((1-n^{-1})x_1,\cdots,\left(\frac{1}{n-1}-n^{-1}\right)x_{n-1},0\,x_n,\left(\frac{1}{n+1}-n^{-1}\right)x_{n+1},\cdots\right)=0$$

作为(6.1-22)式的解 x，有 $x_1=0$，$\cdots$，$x_{n-1}=0$，x_n 可取任何数，$x_{n+1}=0$，$\cdots$，即方程(6.1-22)有非零解，亦即 $N(T_\lambda)\neq\{0\}$，$T_\lambda^{-1}=(T-\lambda I)^{-1}$不存在. 则这样的 λ属于 T 的点谱，即 λ是 T 的特征值.

(3) 如果 $\lambda=0$，方程 $Tx=0$，即

$$\left(x_1,\ \frac{1}{2}x_2,\ \cdots,\ \frac{1}{n}x_n,\ \cdots\right)=0$$

它只有零解，所以 T^{-1} 存在，但 T^{-1} 无界. 因为 $\forall\ y\in D(T^{-1})\subset l^2$，有

$$T^{-1}y=(y_1,\ 2y_2,\ \cdots,\ ny_n,\ \cdots)$$

取 $y^{(1)}=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots)$，$\cdots$，$y^{(m)}=(\underbrace{0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1}_{m个},\ 0,\ \cdots)$，$\cdots\in D(T^{-1})$，但是

$$T^{-1}y^{(m)}=(0,\ \cdots,\ 0,\ m,\ 0,\ \cdots)\qquad m=1,\ 2,\ \cdots$$

$\|y^{(m)}\|=1$，而 $\|T^{-1}y^{(m)}\|=m\to\infty(m\to\infty)$，所以 T^{-1} 是无界算子.

这时 T 的值域 $\overline{R(T)}=l^2$，但 $R(T)\neq l^2$. 事实上，向量

$$(1,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots,\ 0),\ \left(0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \cdots\right),\ \cdots,\ (\underbrace{0,\ 0\cdots 0,\ m^{-1}}_{m个},\ 0,\ \cdots),\ \cdots$$

都属于 $R(T)$，$R(T)$ 是线性集，所以这些向量的线性组合包含在 $R(T)$ 内，从而 $\overline{R(T)}=l^2$. 下证：$R(T)\neq l^2$，若不然，设 $R(T)=l^2$，则由逆算子定理知 T^{-1} 是有界算子，得到矛盾. 可见 $\lambda=0$ 属于 T 的连续谱.

总之，我们得到

$$\sigma_c(T)=\{0\},\ \sigma_p(T)=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\right\},\ \sigma_r(T)=\varnothing$$

$$\rho(T)=C\ \left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\right\}$$

6.1.2 线性有界算子谱的基本性质

由以上例子可以看出，在无穷维线性赋范空间中，有界线性算子的谱值不像有限维空间那样简单，常会出现各种复杂的情况. 也就是说，给定一个算子，要找出谱的具体分布是很困难的. 人们经过深入研究，关于线性算子的正则集与谱集，得到了一些定性的结果. 这里介绍其中最基本的性质.

定理 6.1.1(谱集的闭性) 设 X 是复的 Banach 空间，$T\in B(X\to X)$，则 $\rho(T)$ 是开集，$\sigma(T)$ 是闭集.

证 若 $\rho(T)=\varnothing$，则 $\rho(T)$ 显然是开集，从而 $\sigma(T)$ 是闭集.

设 $\rho(T)\neq\varnothing$，对于固定的 $\lambda_0\in\rho(T)$ 及任意的 $\lambda\in C$，有

$$T-\lambda I=T-\lambda_0 I-(\lambda-\lambda_0)I=(T-\lambda_0 I)[I-(T-\lambda_0 I)^{-1}(\lambda-\lambda_0)]$$

考察算子 $I-(T-\lambda_0 I)^{-1}(\lambda-\lambda_0)$，由 $\lambda_0\in\rho(T)$，$(T-\lambda_0 I)^{-1}$ 是有界线性算子，且非零. 对于满足 $|\lambda-\lambda_0|<\|(T-\lambda_0 I)^{-1}\|^{-1}$ 的 λ，有

$$\|(T-\lambda_0 I)^{-1}(\lambda-\lambda_0)\|<1$$

根据定理 4.3.4，知算子

$$V=[I-(T-\lambda_0 I)^{-1}(\lambda-\lambda_0)]$$

有有界逆算子

$$V^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}[(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^k=\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k R_{\lambda_0}^k \tag{6.1-23}$$

由 $\|(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}\|<1$，即有

$$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|} \tag{6.1-24}$$

由 $T_{\lambda_0}^{-1}=R_{\lambda_0}\in B(X\to X)$，可得对每一个满足(6.1－24)式的 λ，算子 $T_\lambda=T-\lambda I$ 都有有界逆算子. 事实上，

$$R_\lambda=T_\lambda^{-1}=(T_{\lambda_0}V)^{-1}=V^{-1}R_{\lambda_0}\in B(X\to X) \tag{6.1-25}$$

从而 $\left\{\lambda\in C\mid|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}\right\}\subset\rho(T)$，所以 $\rho(T)$ 是开集. 从而 $\rho(T)$ 的余集 $\sigma(T)=C\setminus\rho(T)$ 是闭集. □

注 6.1.1 在定理 6.1.1 的证明中，结合(6.1－23)式与(6.1－25)式可得 T 的预解式 $R_\lambda(T)$ 的表示式，即当 λ 满足(6.1－24)式时，有

$$R_\lambda=T_\lambda^{-1}=V^{-1}R_{\lambda_0}=\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^kR_{\lambda_0}^{k+1} \tag{6.1-26}$$

这一结果可以写成下面定理.

定理 6.1.2(预解式的表示) 设 X 是复的 Banach 空间，$T\in B(X\to X)$ 对每个 $\lambda_0\in\rho(T)$，预解式 $R_\lambda(T)$ 可以表示成算子级数(6.1－26)式，并且这级数在开圆盘

$$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$$

中是绝对收敛的，这圆盘是 $\rho(T)$ 的子集. □

这个表示定理也可以通过复分析得到. 作为定理 6.1.1 的另一应用，我们可借助它来证明：对于有界线性算子而言，它的谱是复平面上的有界集.

定理 6.1.3 设 X 是 Banach 空间，$T\in B(X\to X)$，则 T 的谱 $\sigma(T)$ 是紧集，且落在圆盘

$$|\lambda|\leqslant\|T\| \tag{6.1-27}$$

之中，因此 $\rho(T)$ 不空.

证 设 $\lambda\neq0$，根据定理 4.3.4，可得

$$R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{1}{\lambda}T\right)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^kT^k \tag{6.1-28}$$

对于 $\left\|\frac{1}{\lambda}T\right\|=\frac{1}{|\lambda|}\|T\|<1$，即 $|\lambda|>\|T\|$ 的一切 λ，级数(6.1－28)式都收敛. 这说明 $\rho(T)\supset\{\lambda\mid|\lambda|>\|T\|\}$，故 $\rho(T)$ 不空，由此知 $\sigma(T)\subset\{\lambda\mid|\lambda|\leqslant\|T\|\}$，从而 $\sigma(T)$ 是有界的，再由定理 6.1.1 知 $\sigma(T)$ 是闭的，故 $\sigma(T)$ 是紧集. □

由定理 6.1.3 可知，复 Banach 空间上有界线性算子的谱是有界集，且落在以原点为中心、以 $\|T\|$ 为半径的圆盘之内. 那么，包含 $\sigma(T)$ 的圆盘的最小半径是什么呢？这就引出如下的概念.

定义 6.1.3(谱半径) 设 X 是复的 Banach 空间，$T\in B(X\to X)$，则称复平面上的以原点为中心，包含 $\sigma(T)$ 的最小闭圆盘的半径为算子 T 的谱半径，记为 $r(T)$，于是

$$r(T)=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$$

由定理 6.1.3 和定义 6.1.3，可得

$$r(T)\leqslant\|T\| \tag{6.1-29}$$

还可以进一步证明如下的结果(定理 6.1.4).

定理 6.1.4(盖勒范德, и. м. тельфаид)　设 X 是 Banach 空间，$X\neq\{0\}$，$T\in B(X\to X)$，则

(1) $\sigma(T)\neq\varnothing$；

(2) $r(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}$.

证略(参看文献[1]). □

例 6.1.5　考虑 Volterra 积分方程

$$\lambda x(t)-\int_a^t K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s=v(t)\qquad t\in[a,b]\tag{6.1-30}$$

其中，$x, v\in X=C[a,b]$，$\lambda\in\mathbf{C}$，$K(t,s)$在矩形 $R=\{(t,s)\mid a\leqslant t,s\leqslant b\}$上连续，令

$$M=\max_{a\leqslant t,s\leqslant b}|K(t,s)|$$

在第五章，我们应用压缩映射原理讨论过方程(6.1-30)解的存在性、唯一性及求解的迭代过程. 在这里我们变换一个角度，应用有界线性算子谱理论来进行研究. 定义算子 T：$X\to X$，

$$Tx(t)=\int_a^t K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s\qquad t\in[a,b]$$

$$\begin{aligned}\|Tx\|&=\max_{t\in[a,b]}|Tx(t)|=\max_{t\in[a,b]}\left|\int_a^t K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant(b-a)M\|x\|\end{aligned}$$

则 $T\in B(X\to X)$，定义 T^n：$X\to X$，

$$T^n x(t)=\int_a^t K_n(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s\qquad t\in[a,b]$$

其中 $K_n(t,s)$定义为

$$K_n(t,s)=\begin{cases}\displaystyle\int_a^t K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau & a\leqslant s\leqslant t\leqslant b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

应用归纳法可证

$$\int_a^t |K_n(t,s)|\,\mathrm{d}s\leqslant\frac{M^n(t-a)^n}{n!}\tag{6.1-31}$$

事实上，

$$\int_a^t |K_1(t,s)|\,\mathrm{d}s\leqslant M(t-a)$$

即 $n=1$ 时，(6.1-31)式成立. 假设(6.1-31)式成立，则

$$\begin{aligned}\int_a^t |K_{n+1}(t,s)|\,\mathrm{d}s&=\int_a^t\left|\int_a^t K(t,\tau)K_n(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau\right|\mathrm{d}s\\&\leqslant\int_a^t\mathrm{d}s\int_a^t|K(t,\tau)||K_n(\tau,s)|\,\mathrm{d}\tau\\&=\int_a^t\mathrm{d}\tau\int_a^t|K(t,\tau)||K_n(\tau,s)|\,\mathrm{d}s\\&\leqslant M\int_a^t\frac{M^n(\tau-a)^n}{n!}\,\mathrm{d}\tau=\frac{M^{n+1}(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

即(6.1-31)式对所有 n都成立. 从而有

$$\| T^n \| = \sup_{\|x\|=1} \| T^n x \| = \sup_{\|x\|=1} \max_{t\in[a,b]} \left| \int_a^t K_n(t, s) x(s) \, \mathrm{d}s \right|$$
$$\leqslant \max_{t\in[a,b]} \int_a^t | K_n(t, s) | \, \mathrm{d}s \leqslant \frac{M^n (b-a)^n}{n!}$$

根据定理 6.1.4 知

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| T^n \|} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{M(b-a)}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

因此 $\lambda=0$ 是算子 T 的唯一谱点，$\lambda\neq 0$ 是 T 的正则值. 积分方程(6.1-30)可以写成算子方程

$$(\lambda I - T) x = v \tag{6.1-32}$$

当 $\lambda\neq 0$ 时，$T_\lambda = (\lambda I - T)$ 有有界逆. 容易验证 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$ 收敛且有

$$R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$

所以方程(6.1-30)有唯一解

$$x = (\lambda I - T)^{-1} v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} v$$

6.2 自共轭算子的谱

Hilbert 空间中有界自共轭算子具有广泛的应用. 例如，具有对称核的线性积分方程理论与积分算子的谱(特征值)紧密相关. 这一节，我们介绍有界自共轭算子及全连续自共轭算子谱的基本性质.

6.2.1 有界自共轭算子谱的性质

定理 6.2.1(特征值) 设 H 是复 Hilbert 空间，$T\in B(H\to H)$ 是自共轭算子，则

(1) T 的所有特征值都是实的；

(2) 对应于 T 的不同特征值的特征向量是彼此正交的.

证 (1) 设 λ 是 T 的特征值，x 是相应的特征向量，则 $x\neq 0$，$Tx=\lambda x$. 由于 T 是自共轭算子，故

$$\lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Tx, x) = (x, Tx) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x)$$

因为 $(x, x) = \| x \|^2 \neq 0$，则 $\lambda = \bar{\lambda}$，即 λ 是实数.

(2) 设 λ, μ 是 T 的不同特征值，x, y 是相应的特征向量，$Tx=\lambda x$, $Ty=\mu y$. 由 T 自共轭，知 λ, μ 都是实数.

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Tx, y) = (x, Ty) = (x, \mu y) = \mu(x, y)$$

由于 $\lambda\neq\mu$, 故 $(x, y)=0$. □

定理 6.2.2(预解集) 设 H 是复 Hilbert 空间，$T\in B(H\to H)$ 是自共轭算子，则 $\lambda\in\rho(T) \Longleftrightarrow$ 存在常数 $C>0$，使 $\forall x\in H$，有

$$\|T_\lambda x\| \geqslant C\|x\| \tag{6.2-1}$$

证 $\Rightarrow$ 设 $\lambda\in\rho(T)$，即 $(T-\lambda I)^{-1}$ 在 H 上存在且有界. 令 $d=\|T-\lambda I\|^{-1}$（显然 $d\neq0$）. 由 $y=(T-\lambda I)x$，得 $x=(T-\lambda I)^{-1}y$，于是

$$\|x\| = \|(T-\lambda I)^{-1}y\| \leqslant \|(T-\lambda I)^{-1}\|\|y\| = d\|(T-\lambda I)x\|$$

取 $C=1/d$，有 $\|T_\lambda x\|=\|(T-\lambda I)x\|\geqslant C\|x\|$.

$\Leftarrow$ 如果(6.2-1)式成立，则 $(T-\lambda I)x=0$ 只有零解，于是 $T-\lambda I$ 可逆. 又由逆算子定理知 $(T-\lambda I)^{-1}$ 有界. 剩下只需证明值域 $R(T-\lambda I)=H$.

易知 $R(T-\lambda I)$ 是 H 的线性子空间. 如果 $\{y_n\}\subset R(T-\lambda I)$，$y_n\to y(n\to\infty)$，则存在 $\{x_n\}\subset H$，使 $y_n=(T-\lambda I)x_n$，于是

$$\|y_m-y_n\| = \|(T-\lambda I)(x_m-x_n)\| \geqslant C\|x_m-x_n\|$$

由于 $\{y_n\}$ 收敛，知 $\{y_n\}$ 是基本列，故 $\{x_n\}$ 是 H 中基本列. 由 H 完备，则 $\{x_n\}$ 收敛，设 $x_n\to x\in H(n\to\infty)$，再由 $T-\lambda I$ 连续，有

$$(T-\lambda I)x = \lim_{n\to\infty}(T-\lambda I)x_n = \lim_{n\to\infty}y_n = y$$

即 $y\in R(T-\lambda I)$. 从此可知 $R(T-\lambda I)$ 是 H 的闭线性子空间.

最后，任取 $x\in(R(T-\lambda I))^{\perp}$，则对每一 $y\in R(T-\lambda I)$，都有 $(x,y)=0$，于是对 $x'\in H$，都有 $((T-\lambda I)x',x)=0$. 由 T 自共轭，知 $T-\lambda I$ 自共轭，则 $(x',(T-\lambda I)x)=((T-\lambda I)x',x)=0$，从而 $(T-\lambda I)x=0$. 再利用不等式 $0=\|(T-\lambda I)x\|\geqslant C\|x\|$，可得 $x=0$，即 $(R(T-\lambda I))^{\perp}=\{0\}$，这就证明了 $R(T-\lambda I)=H$. □

注 6.2.1 定理 6.2.2 的等价命题是：λ 是有界自共轭算子 T 的谱点 $\Longleftrightarrow$ 对任何实数列 $C_n>0$，$C_n\to0(n\to\infty)$，存在 $x_n\in H$，使得

$$\|(T-\lambda I)x_n\| < C_n\|x_n\| \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{6.2-2}$$

或 $\lambda\in\sigma(T)\Longleftrightarrow$ 存在 $x_n\in H$，$\|x_n\|=1$，使

$$\lim_{n\to\infty}\|(T-\lambda I)x_n\| = 0 \tag{6.2-3}$$

定理 6.2.3(谱集) 设 H 是复 Hilbert 空间，$T\in B(H\to H)$ 是自共轭算子，则谱集 $\sigma(T)$ 是实数集.

证 设 $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta(\beta\neq0)$，$x\in H$，$y=(T-\lambda I)x$，则

$$(y,x) = (Tx,x) - \lambda(x,x)$$

$$(x,y) = \overline{(y,x)} = (Tx,x) - \bar{\lambda}(x,x) \qquad (Tx,x)\in\mathbf{R}^1$$

于是

$$(x,y)-(y,x) = (\bar{\lambda}-\lambda)(x,x) = -2\beta\mathrm{i}\|x\|^2$$

$$\begin{aligned}2|\beta|\|x\|^2 &= |(x,y)-(y,x)|\\ &\leqslant |(x,y)|+|(y,x)|\\ &\leqslant 2\|x\|\|y\|\end{aligned}$$

即 $\|y\|=\|(T-\lambda I)x\|\geqslant|\beta|\|x\|$，根据定理 6.2.2 知 λ 是正则点. □

定理 6.2.4(谱点范围) 设 T：$H\to H$ 是复 Hilbert 空间中的有界自共轭线性算子，则 $\sigma(T)\subset[m,M]$，其中

$$m = \inf_{\|x\|=1}(Tx,x),\ M = \sup_{\|x\|=1}(Tx,x) \tag{6.2-4}$$

这里 m，M 分别称为 T 的下界和上界.

证 由定理6.2.3，有 $\sigma(T)\subset\mathbf{R}^1$，现在只需证明：任何实数 $\lambda=M+C$(或 $\lambda=m-C$)都是 T 的正则值(这里 $C>0$).

对任何 $x\neq 0$ 和 $u=\|x\|^{-1}x$，则 $x=\|x\|u$，于是

$$(Tx,x)=\|x\|^2(Tu,u)\leqslant\|x\|^2\sup_{\|v\|=1}(Tv,v)=M\|x\|^2$$

由此有 $-(Tx,x)\geqslant -M\|x\|^2$. 由Schwarz不等式，有

$$\begin{aligned}\|T_\lambda x\|\|x\|&\geqslant-(T_\lambda x,x)=-(Tx,x)+\lambda(x,x)\\&\geqslant-M\|x\|^2+\lambda\|x\|^2=C\|x\|^2\end{aligned}$$

这里 $C=\lambda-M>0$，注意 $x\neq 0$，则 $\|T_\lambda x\|\geqslant C\|x\|$. 应用定理6.2.2知 $\lambda\in\rho(T)$. 当 $\lambda=m-C$ 时可类似证明. □

定理6.2.5 设 H 是复Hilbert空间，$T\in B(H\to H)$ 是自共轭算子，m，M 分别是 T 的下界和上界，则有

$$\|T\|=\max\{|m|,|M|\}\tag{6.2-5}$$

证 令 $K=\max\{|m|,|M|\}$，由于

$$\begin{aligned}|M|&=\left|\sup_{\|x\|=1}(Tx,x)\right|\leqslant\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|\\&\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\|x\|\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|T\|\|x\|^2=\|T\|\end{aligned}$$

当 $m\geqslant 0$ 时，显然有

$$|m|=m\leqslant M=|M|\leqslant\|T\|$$

当 $m<0$ 时，

$$\begin{aligned}|m|&=-m=-\inf_{\|x\|=1}(Tx,x)=\sup_{\|x\|=1}[-(Tx,x)]\\&\leqslant\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|\leqslant\|T\|\end{aligned}$$

故有 $|m|\leqslant\|T\|$. 总之有 $K\leqslant\|T\|$. 下证 $K\geqslant\|T\|$.

对任何 $\lambda>0$，$x\in H$，根据 T 的对称性可直接验证如下等式：

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2&=(Tx,Tx)\\&=\frac{1}{4}\left[\left(T\left(\lambda x+\frac{1}{\lambda}Tx\right),\lambda x+\frac{1}{\lambda}Tx\right)-\left(T\left(\lambda x-\frac{1}{\lambda}Tx\right),\lambda x-\frac{1}{\lambda}Tx\right)\right]\end{aligned}$$

再由 K 的定义有

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2&\leqslant\frac{1}{4}K\left(\left\|\lambda x+\frac{1}{\lambda}Tx\right\|^2+\left\|\lambda x-\frac{1}{\lambda}Tx\right\|^2\right)\\&=\frac{1}{2}K\left(\lambda^2\|x\|^2+\frac{1}{\lambda^2}\|Tx\|^2\right)\end{aligned}$$

对任何 $x\neq 0$ 及 $Tx\neq 0$，令 $\lambda=\left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right)^{1/2}$，则得

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2&\leqslant\frac{1}{2}K\left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\|x\|^2+\frac{\|x\|}{\|Tx\|}\|Tx\|^2\right)\\&=K\|Tx\|\|x\|\end{aligned}$$

故有

$$\|Tx\|\leqslant K\|x\|$$

于是 $\|T\|\leqslant K$，从而 $\|T\|=K$. □

定理6.2.6 设 $T\in B(H\to H)$ 是自共轭算子，则 m，$M\in\sigma(T)$.

证 先设 $m\geqslant 0$，下证 $M\in\sigma(T)$（对 m 证法相同）．根据定理 6.2.5，$\|T\|=\max(|m|,|M|)=\max(m,M)=M$. 由定义知存在$\{x_n\}\subset H$，$\|x_n\|=1$，$(Tx_n, x_n)=M-\varepsilon_n$，$\varepsilon_n\geqslant 0$，$\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$．如果能够证明$\lim\limits_{n\to\infty}\|Tx_n-Mx_n\|=0$. 根据注 6.2.1 的(6.2－3)式可知 $M\in\sigma(T)$．事实上

$$\begin{aligned}\|Tx_n-Mx_n\|^2&=(Tx_n-Mx_n, Tx_n-Mx_n)\\&=\|Tx_n\|^2+M^2\|x_n\|^2-2M(Tx_n, x_n)\\&\leqslant 2M^2-2M(M-\varepsilon_n)=2M\varepsilon_n\to 0\qquad n\to\infty\end{aligned}$$

由此即得 $M\in\sigma(T)$．同理可证 $m\in\sigma(T)$．

若 $m<0$，可取一适当实数 $k>0$，使 $m+k\geqslant 0$，当 T 是自共轭算子时，$T+kI$ 也是自共轭算子，则有

$$M=\sup_{\|x\|=1}(Tx, x)\Longleftrightarrow M+k=\sup_{\|x\|=1}((T+kI)x, x)$$

并且，$M\in\sigma(T)\Longleftrightarrow M+k\in\sigma(T+kI)$．这就证明了对一般情况结论成立． □

定理 6.2.7 设 $T\in B(H\to H)$ 自共轭，则 $\sigma_r(T)=\varnothing$.

证 设 $\sigma_r(T)\neq\varnothing$，任取 $\lambda\in\sigma_r(T)$，则 $T_\lambda^{-1}=(T-\lambda I)^{-1}$ 存在，但 $R(T_\lambda)$ 不在 H 中稠密，即$\overline{R(T_\lambda)}\neq H$. 由正交分解定理知，存在 $y\neq 0$，$y\perp R(T_\lambda)$，所以有

$$(T_\lambda x, y)=0\qquad\forall\ x\in H$$

由定理 6.2.3 知 $\sigma(T)$ 是实数集，即 λ 是实数，则 T_λ 是自共轭算子，所以得

$$(x, T_\lambda y)=(T_\lambda x, y)=0\qquad\forall\ x\in H$$

则有 $T_\lambda y=(T-\lambda I)y=0$，即 λ 是 T 的特征值，矛盾． □

以上两定理说明有界自共轭算子的谱集不空，但不含剩余谱.

6.2.2 全连续自共轭线性算子的特征展开

在第五章 5.2 节我们曾给出全连续算子的定义（定义 5.2.5）．在那里，算子指非线性算子，本节讨论全连续自共轭线性算子的特征展开．我们先给出全连续线性算子的定义．

定义 6.2.1（全连续线性算子） 设 X，Y 是同一数域 Λ 上的线性赋范空间，$T\in(X\to Y)$，如果 T 将 X 中的任何有界集映成 Y 中的列紧集，则称 T 为**全连续线性算子**，简称**全连续算子**.

由全连续算子定义，容易证得如下性质（读者自己证明）：

(1) 全连续线性算子必是线性有界（连续）算子；

(2) 有限维空间至有限维空间的线性算子是全连续算子；

(3) 值域 $R(T)\subset Y$ 为有限维子空间的线性有界算子是全连续算子；

(4) 两个全连续线性算子之和，数与全连续算子之积，全连续线性算子与线性有界算子之积（$X=Y$）是全连续线性算子；

(5) 当 Y 是 Banach 空间时，X 到 Y 的全连续线性算子全体构成 Banach 空间.

例 6.2.1（全连续积分算子） 设 $K(s, t)$ 是正方形 $a\leqslant s$，$t\leqslant b$ 上的连续函数，则算子 T

$$Tx(s)=\int_a^b K(s, t)x(t)\,\mathrm{d}t\tag{6.2－6}$$

是 $C[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 的全连续算子.

证 T 显然是线性算子．设 B 是 $C[a, b]$ 中的有界集．要证 T 是全连续算子，只需证

明$\{Tx(s)\mid x\in B\}$一致有界且等度连续.

任取 $x\in B$，有 $\|x\|\leqslant M$(由 B 有界)，于是

$$\|Tx\| = \max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)||x(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant K_0M(b-a)$$

其中 $K_0=\max_{a\leqslant s,t\leqslant b}|K(s,t)|$，故$\{Tx(s)\mid x\in B\}$一致有界.

由于 $K(s,t)$在矩形 $a\leqslant s,t\leqslant b$上连续，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|s_1-s_2|<\delta$时，对一切 $t\in[a,b]$，有$|K(s_1,t)-K(s_2,t)|<\varepsilon/M(b-a)$，从而

$$|Tx(s_1)-Tx(s_2)| = \left|\int_a^b K(s_1,t)x(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b K(s_2,t)x(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \int_a^b |K(s_1,t)-K(s_2,t)||x(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \|x\|\int_a^b |K(s_1,t)-K(s_2,t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \|x\|\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\int_a^b \mathrm{d}t<\varepsilon$$

即$\{Tx(s)\mid x\in B\}$等度连续.

定理 6.2.8 设 X_1 是线性赋范空间，X_2 是 Banach 空间，$T_n\in B(X_1\to X_2)(n=1,2,3,\cdots)$全连续，$\{T_n\}$依范数收敛于 T，则 T 是全连续算子.

证 根据定理 4.3.3 知 $T\in B(X_1\to X_2)$. 下证 T 是全连续算子. 设 M 是 X_1 中的有界集，则对每个固定的 n，$T_n(M)$是 X_2 中的列紧集. 由$\|T_n-T\|\to 0$，故对任意 $\varepsilon>0$，存在 n_0，使对一切 $x\in M$，$\|T_{n_0}x-Tx\|<\varepsilon$，即 $T_{n_0}(M)$是 $T(M)$的列紧 ε网. 因 X_2 完备，则 $T(M)$列紧，所以 T 全连续. □

定理 6.2.9 设 X_1，X_2 是线性赋范空间，T 是 X_1 到 X_2 的全连续线性算子，则 $R(T)\subset X_2$ 可分.

证 对每一 n，记 $B(0,n)=\{x\in X_1\mid\|x\|<n\}$，令 $M_n=TB(0,n)$，则 M_n 列紧，从而 M_n 可分，即 M_n 有可列的稠密子集 $G_n=\{x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_k^{(n)},\cdots\}$，再由 $TX_1\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}TB(0,n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n$，可知 TX_1 有可列稠密子集$\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$，因此 TX_1 可分. □

定理 6.2.10 设 H是复 Hilbert 空间，$T: H\to H$是全连续自共轭线性算子，则 T 的任何非零谱点必是 T 的特征值.

证 设 $\lambda\in\sigma(T)$，$\lambda\neq 0$，则由注 6.2.1 中的(6.2-3)式知，存在$\{x_n\}\subset H$，满足

$$\|x_n\|=1,\ \|Tx_n-\lambda x_n\|\to 0\qquad n\to\infty$$

由 T 全连续，$\{x_n\}$有界，则存在$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$，使 $Tx_{n_k}\to y_0$，从而 $\lambda x_{n_k}\to y_0$(显见 $y_0\neq 0$)，即

$$x_{n_k}\to\frac{1}{\lambda}y_0$$

故

$$Tx_{n_k}\to\frac{1}{\lambda}Ty_0$$

由极限的唯一性可得$\frac{1}{\lambda}Ty_0=y_0$，即 $Ty_0=\lambda y_0$，所以 λ 是 T 的特征值. □

推论 6.2.1(特征值的存在性) 设 H 是复 Hilbert 空间，T: $H\to H(T\neq 0)$全连续自共轭，则 m, M中绝对值大的必是 T 的特征值，T没有绝对值更大的特征值.

证 根据定理 6.2.6 可知，m, M都是 T 的谱点，由于 $0<\|T\|=\max(|m|,|M|)$，因而 m, M中绝对值大的必是 T 的非零谱点，由定理 6.2.10 知，它是 T的特征值. 当 $|\lambda|>\|T\|$时，则 $\lambda\in\rho(T)$，故没有绝对值更大的特征值. □

引理 6.2.1 Hilbert 空间 H上的全连续自共轭算子的点谱(特征值)是可列(或有限)集，至多有一个极限点 0.

证 设 T是 $H\to H$的全连续自共轭算子，$\forall\ \varepsilon>0$，下证：在 0 的 ε邻域$(-\varepsilon,\varepsilon)$之外，$T$的特征值只有有限多个. 不然，设 T有一列特征值$\{\lambda_n\}$，$n=1,2,3,\cdots$，$|\lambda_n|\geqslant\varepsilon$, 对应每个特征值 λ_n有标准特征向量 x_n，$\|x_n\|=1$，则当 $m\neq n$时，

$$\|Tx_n-Tx_m\|^2=\|\lambda_n x_n-\lambda_m x_m\|^2=\lambda_n^2+\lambda_m^2\geqslant 2\varepsilon^2$$

这与 T 全连续相矛盾. □

注 6.2.2 当 H是有限维空间、T自共轭(T对应 Hermite 矩阵)时，0 可能是 T的特征值或正则值. 当 H是无限维空间、T是全连续自共轭算子时，0 点不属于 T的正则集. 事实上，如果 $0\in\rho(T)$，那么 T^{-1}便是 H上的线性有界算子. 由全连续算子的性质(3)知，$I=T^{-1}T$是全连续算子，这样 H中的单位球是致密集，这与第三章定理 3.2.5 的结论相矛盾. 这样 0 可能是 T的特征值，也可能属于 T的连续谱，0 不会属于剩余谱(定理 6.2.7).

引理 6.2.2 Hilbert 空间 H上的全连续自共轭算子 T的任何非零特征值对应的特征子空间是有限维的.

证 设 $\lambda\neq 0$ 是 T的特征值. 如果 λ对应的特征子空间是无限维的，则存在 T的标准正交特征向量系$\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，都对应于同一个 λ 注意 $\|x_n\|=1$，但 $m\neq n$时，有

$$\|Tx_m-Tx_n\|^2=|\lambda x_m-\lambda x_n|^2=2\lambda^2$$

这样$\{Tx_n\}$中不含有收敛子列，这与 T全连续相矛盾，所以 λ对应的特征子空间是有限的. □

根据引理 6.2.1 及引理 6.2.2 知，Hilbert 空间 H上的全连续自共轭算子的特征值至多有可列个，且与每个特征值对应的标准特征向量只有有限个. 因此，对于全连续的自共轭算子，我们将其非零特征值按绝对值大小排成一列，如果特征值 λ对应 k个标准正交的特征向量，可把 λ重复排列 k次，得到

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots$$

若有无限多个，则必有 $\lambda_n\to 0$. 它们对应的所有标准特征向量

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

$(Tx_n=\lambda_n x_n)$构成 H的标准正交系.

定义 6.2.2(不变子空间) 设 X是线性赋范空间，$M\subset X$是子空间，$T\in(X\to X)$，如果对任何 $x\in M$, 总有 $Tx\in M$, 称 M是算子 T 的**不变子空间**.

引理 6.2.3 设 H是 Hilbert 空间，T是 H上的自共轭算子，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是 T的

一组特征向量，则由 x_1，x_2，…，x_n 张成的子空间

$$M=\mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

及 M的正交补 $M^{\perp}$都是 T的不变子空间.

证 显然 M是 T的不变子空间. 只需证 $M^{\perp}$是 T的不变子空间. 即对任何 $y\in M^{\perp}$，证 $Ty\in M^{\perp}$. 对于任何 $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\in M$，有

$$(Ty, x)=\left(Ty, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)=\left(y, T\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)$$

$$=\left(y, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i Tx_i\right)=\left(y, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i x_i\right)=0$$

即 $Ty\perp M$，故 $Ty\in M^{\perp}$. □

定理 6.2.11(特征展开) 设 H是 Hilbert 空间，$T: H\to H$是全连续自共轭算子($T\neq\theta$)，则 T有有限个或可列个非零特征值$\{\lambda_n\}$(依正交特征向量空间的维数重复)，以及对应的标准正交特征向量$\{x_n\}$，满足：

(1) $|\lambda_0|\geqslant|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots$，$\{x_n\}$是 H的标准正交系；

(2) 当$\{\lambda_n\}$可列时，则有 $\lambda_n\to 0$；

(3) 对任何 $x\in H$，有

$$Tx=\sum_{i\in I}(Tx, x_i)x_i=\sum_{i\in I}(x, Tx_i)x_i$$

$$=\sum_{i\in I}\lambda_i(x, x_i)x_i \tag{6.2-7}$$

(4) 如果记 $M_i=\mathrm{span}\{x_i\}$，$i=0, 1, 2, \cdots$，P_i表示 $H\to M_i$的投影算子，即 $\forall x\in H$，

$$P_i x=(x, x_i)x_i \tag{6.2-8}$$

则算子 T在强收敛意义下可表示成

$$T=\sum_{i\in I}\lambda_i P_i \tag{6.2-9}$$

(6.2-7)、(6.2-9)式中的 $\sum_{i\in I}$ 可以表示有限和($\{\lambda_i\}$有限)或无限和($\{\lambda_i\}$可列).

证 根据推论 6.2.1，可取 m，M中绝对值较大者作为 λ_0，取相应的单位特征元为 x_0，$\|x_0\|=1$. 由引理 6.2.3 知 $H_1=\{\alpha_0 x_0\}^{\perp}$是 T的不变子空间，$H_1\subset H$，将 T视为 H_1中的算子，它仍为全连续自共轭算子，可取

$$m_1=\inf_{\substack{x\in H_1\\ \|x\|=1}}(Tx, x), \quad M_1=\sup_{\substack{x\in H_1\\ \|x\|=1}}(Tx, x)$$

中绝对值较大者作为 λ_1(显然$|\lambda_0|\geqslant|\lambda_1|$)，并取相应的单位特征元为 x_1，$\|x_1\|=1$. 显然有 $x_1\perp x_0$，再由引理 6.2.3 知 $H_2=\{\alpha_0 x_0+\alpha_1 x_1\}^{\perp}$是 T的不变子空间，$H_2\subset H_1$，将 T视为 H_2中的算子，它仍为全连续自共轭算子，可取

$$m_2=\inf_{\substack{x\in H_2\\ \|x\|=1}}(Tx, x), \quad M_2=\sup_{\substack{x\in H_2\\ \|x\|=1}}(Tx, x)$$

中绝对值较大者作为 λ_2($|\lambda_0|\geqslant|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|$)，并取相应的单位特征元为 x_2，$\|x_2\|=1$，$x_2\perp x_0$，$x_2\perp x_1$，…以上作法或可以无限进行下去，或至某一步时，T成为 H_n上的零算子. 总之可得有限个或可列个非零特征值$\{\lambda_i\}$及相应的特征元$\{x_i\}$. 下证$\{\lambda_i\}$、$\{x_i\}$满足

(1)、(2)、(3).

(1) 由$\{\lambda_i\}$及$\{x_n\}$的取法便知.

(2) 应用引理 6.2.1 可得.

(3) 对任何 $x\in H$, 因为

$$\left(x-\sum_{i=1}^{n}{}'(x, x_i)x_i, x_j\right)=0 \qquad j=1, 2, \cdots, n$$

所以, $x-\sum_{i=1}^{n}{}'(x, x_i)x_i\in H_n$. 又因

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}{}'(x, x_i)x_i\right\|^2=\|x\|^2-2\sum_{i=1}^{n}{}'|(x, x_i)|^2+\sum_{i=1}^{n}{}'|(x, x_i)|^2$$
$$=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}{}'|(x, x_i)|^2\leqslant\|x\|^2$$

所以

$$\left\|T\left(x-\sum_{i=1}^{n}{}'(x, x_i)x_i\right)\right\|\leqslant\|T\|_{H_n}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}{}'(x, x_i)x_i\right\|$$
$$\leqslant|\lambda_n|\,\|x\|\to 0(\text{或等于 }0)$$

即

$$Tx-T\sum_{i=1}^{n}{}'(x, x_i)x_i\to 0(\text{或等于 }0)$$

因此

$$Tx=T\sum_{i\in I}{}'(x, x_i)x_i=\sum_{i\in I}{}'(x, x_i)Tx_i$$
$$=\sum_{i\in I}{}'\lambda_i(x, x_i)x_i$$

另外,

$$\sum_{i\in I}{}'(Tx, x_i)x_i=\sum_{i\in I}{}'(x, Tx_i)x_i=\sum_{i\in I}{}'(x, \lambda_i x_i)x_i$$
$$=\sum_{i\in I}{}'\lambda_i(x, x_i)x_i$$

即(6.2-7)式成立.

(4) 注意到 $P_i x=(x, x_i)x_i$, 则 $Tx=\sum_{i\in I}{}'\lambda_i(x, x_i)x_i=\sum_{i\in I}{}'\lambda_i P_i x$, 即 $T=\sum_{i\in I}{}'\lambda_i P_i$(在强收敛意义下). □

定理 6.2.11 的结论告诉我们全连续自共轭算子 T 的非零特征值相应的特征元$\{x_n\}$($\|x_n\|=1$)构成 H 的标准正交系. 这个正交系未必是完全系. 例如, 当 H 不可分且 $\lambda=0$ 是特征值时, 它就不是完全正交系. 那么, 在 H 与 T 满足什么条件时, 可使 T 的全部特征元构成 H 的完全标准正交系?关于这一问题, 有以下充分条件, 可写成下述定理.

定理 6.2.12 设 T 是可分的 Hilbert 空间 H 上的全连续自共轭算子, 则 T 的全体单位特征元构成 H 的完全标准正交系.

证 设$\{x_n\}$是相应于 $\lambda_n(\lambda_n\neq 0)$的单位特征元, 由于$\{x_n\}$是 H 的标准正交系, 故 $\forall\ x\in H$, 级数 $\sum_{i\in I}{}'(x, x_i)x_i$ 收敛, 令

$$\sum_{i\in I}{}'(x, x_i)x_i = u$$

则有

$$Tu = T\left(\sum_{i\in I}{}'(x, x_i)x_i\right) = \sum_{i\in I}{}'(x, x_i)Tx_i = \sum_{i\in I}{}'\lambda_i(x, x_i)x_i$$

另一方面，由定理 6.2.11 有

$$Tx = \sum_{i\in I}{}'\lambda_i(x, x_i)x_i$$

于是 $Tx=Tu$，即 $T(x-u)=0$，令 $h=x-u$，则

$$x = u+h = \sum_{i\in I}{}'(x, x_i)x_i + h,\quad Th = 0$$

若 $h=0$，则由定理 3.4.6 知$\{x_i\}$是 H 的完全标准正交系.

若 $h\neq 0$，则 $h\in N(T)$. 由于 H 可分，则零空间 $N(T)$是可分的 Hilbert 空间，根据定理 3.4.8 知 $N(T)$存在完全标准正交系$\{y_k\}$，使

$$h = \sum_{j\in J}{}'(h, y_j)y_j$$

其中，J 为至多可列指标集. 注意到 $Ty_j=0y_j$，故 y_j 是相应于特征值 0 的特征元. 相应于特征值 0 的特征向量空间可能是有限维的，也可能是无穷维的. 显然 $y_j\perp x_i$，$(h, y_j)=(x, y_j)$，从而有

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i\in I}{}'(x, x_i)x_i + \sum_{j\in J}{}'(h, y_j)y_j \\ &= \sum_{i\in I}{}'(x, x_i)x_i + \sum_{j\in J}{}'(x, y_j)y_j\end{aligned}$$

再由定理 3.4.6 知$\{x_i, y_j, i\in I, j\in J\}$是 H 的完全标准正交系. □

6.2.3 具有对称核的积分方程

最后，让我们考察谱论在积分方程理论中的应用.

设 $K(s, t)$在矩形 $R=\{(s, t)\mid a\leqslant s\leqslant b, a\leqslant t\leqslant b\}$上有定义，且 $K(s, t)\in L^2(R)$(即 $K(s, t)$在 R上平方可积)，$K(s, t)=K(t, s)$，定义

$$T\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \qquad \varphi(t)\in L^2[a, b]$$

称 T为具有平方可积对称核的积分算子，则 T是自共轭算子，还可以证明 T是全连续算子.

设$\{e_n(t)\}$是 $L^2[a, b]$的完全标准正交系，则$\{e_n(s)e_m(t)\}$显然是 $L^2(R)$的标准正交系. 设 $f(s, t)\in L^2(R)$，使对一切 m, n,

$$\int_a^b\int_a^b f(s, t)e_n(s)e_m(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = 0$$

固定 n，有

$$\int_a^b e_m(t)\left(\int_a^b f(s, t)e_n(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = 0$$

由$\{e_m(t)\}$的完全性，知$\int_a^b f(s, t)e_n(t)\,\mathrm{d}s=0$(a. e 于$[a, b]$)，再由$\{e_n(s)\}$的完全性，可知 $f(s, t)=0$(a. e 于$[a, b]$). 这就证明了$\{e_m(t)e_n(s)\}$是 $L^2(R)$中的完全标准正交系. 把

$K(s,t)$按$\{e_u(t)e_v(s)\}$展开为 Fourier 级数，有

$$K(s,t)=\sum_{u,w=1}^{\infty}a_{uw}e_w(t)e_v(s)$$

记

$$K_{pq}(s,t)=\sum_{w=1}^{p}\sum_{v=1}^{q}a_{wv}e_w(t)e_v(s)$$

由于 $K_{pq}(s,t)$为核生成的积分算子

$$\begin{aligned}T_{pq}\varphi(s)&=\int_a^b K_{pq}(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\Big[\sum_{w=1}^{p}\sum_{v=1}^{q}a_{wv}e_w(t)e_v(s)\Big]\varphi(t)\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{v=1}^{q}\Big[\int_a^b\sum_{w=1}^{p}a_{wv}e_w(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\Big]e_v(s)\end{aligned}$$

算子 T_{pq}的值域在由 $e_1(s)$，$e_2(s)$，…，$e_q(s)$张成的子空间内，而有限维空间内的有界集必是列紧集，因此 T_{pq}是全连续算子．再由

$$\|T-T_{pq}\|\leqslant\Big[\int_a^b\int_a^b|K(s,t)-K_{pq}(s,t)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\Big]^{\frac{1}{2}}\to 0\qquad p,q\to\infty$$

根据定理 6.2.8 知 T是全连续算子．

定理 6.2.13 若具有平方可积对称核的积分算子 T的所有特征值 λ_n都不等于 1，则积分方程

$$\varphi(s)=f(s)+\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.2-10}$$

有唯一解

$$\varphi(s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(f,x_i)}{1-\lambda_i}x_i \tag{6.2-11}$$

其中 x_i 是对应于 λ_i 的单位特征元(λ_i 可以等于零)．

证 把方程(6.2-10)写成

$$\varphi=f+T\varphi \tag{6.2-12}$$

对方程(6.2-12)两边用 x_i 作内积，得到

$$\begin{aligned}(\varphi,x_i)&=(f,x_i)+(T\varphi,x_i)=(f,x_i)+(\varphi,Tx_i)\\&=(f,x_i)+\lambda_i(\varphi,x_i)\end{aligned}$$

这里 λ_i 是实数．由 $\lambda_i\neq1$，有

$$(\varphi,x_i)=\frac{(f,x_i)}{1-\lambda_i}$$

这样，自然想到欲求函数 φ，可以用它关于$\{x_i\}$的 Fourier 级数来表达．

$$\varphi(s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(f,x_i)}{1-\lambda_i}x_i \tag{6.2-13}$$

下面来验证 φ满足方程(6.2-12)．首先，因为 $f\in L^2[a,b]$，$\sum_{i=1}^{\infty}|(f,x_i)|^2<\infty$，由于 T是全连续自共轭算子，T的特征值集没有非零的极限点，故$\inf_{i\geq1}|1-\lambda_i|>0$，因而存在

常数 $C>0$，使得$\frac{1}{|1-\lambda_i|}\leqslant C$，于是

$$\sum_{i=1}^{\infty}{}' \left|\frac{(f, x_i)}{1-\lambda_i}\right|^2 < \infty$$

这就是说级数(6.2－13)式在 $L^2[a, b]$中收敛．再由定理 6.2.12 知$\{x_i\}$完全，故有

$$T\varphi = \sum_{i=1}^{\infty}{}' \frac{(f, x_i)}{1-\lambda_i} Tx_i = \sum_{i=1}^{\infty}{}' \frac{(f, x_i)}{1-\lambda_i}\lambda_i x_i$$

$$= -\sum_{i=1}^{\infty}{}' (f, x_i) x_i + \sum_{i=1}^{\infty}{}' \frac{(f, x_i)}{1-\lambda_i} x_i = -f + \varphi \qquad (6.2-14)$$

即得 $\varphi = f + T\varphi$.

最后证明解的唯一性，若方程(6.2－12)有另一解 $\tilde{\varphi}$，则必有$(\tilde{\varphi}, x_i) = \frac{(f, x_i)}{1-\lambda_i}$，故有$(\tilde{\varphi}, x_i) = (\varphi, x_i)$．由于 $L^2[a, b]$可分，$\{x_i\}$完全，则可得 $\tilde{\varphi} = \varphi$. □

注 6.2.3 应用(6.2－11)式求解方程(6.2－10)十分不便，原因在于求出积分算子的全部特征元很困难(尤其零特征值对应的特征元)．为了简化计算，可考察(6.2－14)式中的和式 $\sum_{i=1}^{\infty}{}' \frac{(f, x_i)}{1-\lambda_i}\lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty}{}' \frac{(f, x_i)}{1-\lambda_i}\lambda_i x_i$(右边和式中 $\lambda_i \neq 0$)，因此方程(6.2－10)的解可以写成

$$\varphi = f + \sum_{i=1}^{\infty}{}' \frac{(f, x_i)}{1-\lambda_i}\lambda_i x_i \qquad \lambda_i \neq 0 \qquad (6.2-15)$$

定理 6.2.14 对具有对称核的积分方程(6.2－10)，如果 T的特征值$\{\lambda_n\}$中有些等于 1，记这些等于 1 的特征值为$\{\lambda_k\}$(只有有限个)，对应的特征向量为 x_k. 这时如果对某个 x_k，$(f, x_k) \neq 0$，则方程(6.2－10)无解；如果对于每一个 x_k，$(f, x_k) = 0$，则方程(6.2－10)有解

$$\varphi = \sum_{i\neq k}{}' \frac{(f, x_i)}{1-\lambda_i} x_i + \sum_k{}' \xi_k x_k \qquad (6.2-16)$$

证 若对某 x_k，$(f, x_k)\neq 0$，则方程(6.2－10)不可能有解．如若不然，方程(6.2－10)有解 $\varphi(s)$，则

$$(\varphi, x_k) = (f, x_k) + \lambda(\varphi, x_k) = (f, x_k) + (\varphi, x_k)$$

从而$(f, x_k) = 0$，这与条件相矛盾.

如果对 $\lambda_k = 1$ 的特征元 x_k，都有$(f, x_k) = 0$，令 $\varphi = \varphi' + \varphi''$，其

$$\varphi' = \sum_{i\neq k}{}' \frac{(f, x_i)}{1-\lambda_i} x_i \qquad \lambda_i \neq 1$$

$$\varphi'' = \sum_k{}' \xi_k x_k \qquad \lambda_k = 1$$

其中 ξ_k 是任意常数．由条件$(f, x_k) = 0$，与定理 6.2.13 同样的证明方法可证 φ'满足方程

$$T\varphi' = \varphi' - f$$

而对 φ''，都有

$$T\varphi'' = \sum_k{}' \xi T x_k = \sum_k{}' \xi x_k = \varphi''$$

所以

$$T\varphi = T\varphi' + T\varphi'' = \varphi' - f + \varphi'' = \varphi - f$$

即

$$\varphi = f + T\varphi \qquad \square$$

习 题 六

1. 求线性赋范空间 X 上恒等算子 I 的特征值，特征空间及 $\sigma(I)$ 和 $R_\lambda(I)$.

2. 设 $\{x_k\}$ 是可分 Hilbert 空间 H 的完全标准正交系，且 $T: H \to H$，由

$$Tx_k \to x_{k+1} \qquad k = 1, 2, 3, \cdots$$

定义并线性与连续地扩充到整个 H 的算子，求其不变子空间，并证明 T 无特征值.

3. 设 T 是线性赋范空间 X 上的线性算子，λ 是 T^n 的特征值，证明：λ 的 n 次方根 μ 中至少有一个是算子 T 的特征值.

4. 设 $X = C[0, 1]$，在 X 中定义乘法算子 T：

$$(Tx)(t) = tx(t)$$

求 $\sigma(T)$.

5. 设 $X = C[0, 1]$，定义算子 $T: X \to X$ 为 $Tx = yx$，其中 $y \in C[0, 1]$ 固定，求 $\sigma(T)$.

6. 求一个线性算子 $T: X \to X$，其中 $X = C[0, 1]$，使 $\sigma(T) = [a, b]$.

7. 设 z 是 Banach 空间 X 中的固定元素，$f \in X^*$，由 $Tx = f(x)z$ 定义 X 到 X 的线性算子 T，试证 T 是全连续算子.

8. 设 $T: l^2 \to l^2$ 定义为

$$Tx = \left(\frac{x_2}{1}, \frac{x_3}{2}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{n}, \cdots\right) \qquad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in l^2$$

证明 T 是全连续算子，且 $\sigma_p(T) = \{0\}$.

9. 设

$$T\varphi = \int_0^1 e^{s+t}\varphi(t)\,dt$$

求 T 的特征值和特征函数.

10. 设 $K(s, t) = \cos(s+t)$，$0 \leqslant s, t \leqslant \pi$，求积分算子 K 的特征值和特征函数.

11. 求解积分方程：

$$\varphi(s) = 2\int_0^\pi \cos(s+t)\varphi(t)\,dt + 1$$

12. 求解积分方程：

$$\varphi(s) = 3\int_0^2 st\varphi(t)\,dt + 3s - 2$$

第七章　抽象空间的微积分

在前面几章所研究的问题中，主要涉及到线性泛函与线性算子．然而，在自然科学和工科技术中提出的问题，往往涉及非线性泛函与非线性算子．因此，需要对抽象空间中的非线性泛函及非线性算子进行研究．这一章我们不深入地研究非线性算子，只是类比微积分的概念与方法，介绍抽象函数的微积分、非线性算子的导算子、高阶导算子、Taylor 公式、隐函数定理及泛函的极值问题，为今后研究“非线性”问题提供必要的基础理论和方法．

7.1　抽象函数的微积分

设 X 是实 Banach 空间，算子 $x:[a,b]\to X$ 称为 $[a,b]$ 上的抽象函数．

例 7.1.1　$\boldsymbol{x}:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^2$，定义为：$\boldsymbol{x}(t)=(\cos t,\sin t)$，$t\in[0,2\pi]$，则 $\boldsymbol{x}$ 为 $[0,2\pi]$ 上的抽象函数．

例 7.1.2　设

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=f(t,\boldsymbol{x})\\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$f:J\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 连续，且满足 Lipschitz 条件，$J=[t_0-h,t_0+h]$．再设 $\boldsymbol{x}=\varphi(t,\boldsymbol{x}_0)$ 是上述初值问题的唯一解，则 $\boldsymbol{x}(t)=\varphi(t,\boldsymbol{x}_0)$ 是 $[t_0-h,t_0+h]\to\mathbf{R}^n(J)$ 的抽象函数．

定义 7.1.1(导数)　(1) 设 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上的抽象函数，$t_0\in[a,b]$，若存在 $x_0\in X$，满足

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}-x_0\right\|=0 \tag{7.1-1}$$

称 $x(t)$ 在 t_0 点可微，x_0 叫做 $x(t)$ 在 t_0 点的**导数**，记为 $x'(t_0)$．由(7.1-1)式显然有

$$x'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=x_0 \tag{7.1-2}$$

(2) 若 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上每一点都可微(a 点右可微，b 点左可微)，则称 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上可微．

显然，$x(t)$ 的导数 $x'(t)$ 仍是 $[a,b]$ 上的抽象函数．

定理 7.1.1　(1) 若抽象函数 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续．

(2) 若 $x(t)$ 在 t_0 点可微，则 $x(t)$ 在 t_0 点连续．

证明略. □

下面讨论抽象函数的积分，它是微积分中 Riemann 积分在抽象空间中的推广.

定义 7.1.2(Riemann 积分) 设 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上的抽象函数.

(1) 对区间 $[a,b]$ 作任意分割 T

$$T:\ a=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_n=b$$

(2) 作乘积：$\forall\ \xi_i\in[t_{i-1},t_i]$

$$x(\xi_i)\cdot\Delta t_i\qquad \Delta t_i=t_i-t_{i-1}$$

(3) 作和式

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}x(\xi_i)\Delta t_i$$

(4) 若当 $\lambda(T)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta t_i\to 0$ 时，σ 在 X 中趋于某一 $I\in X$，且该极限与分割 T 及 ξ_i 的选取无关，则称抽象函数 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上 **Riemann 可积**，称元素 I 为 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分，记为 $\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t$. 即

$$\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}x(\xi_i)\Delta t_i \tag{7.1-3}$$

与微积分的结论类似，我们有

定理 7.1.2 设 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上的抽象函数，那么，

(1) 若抽象函数 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积；

(2) 若 $x_1(t)$，$x_2(t)$，$x(t)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，α，β 为实数，$f\in X^*$，则有：

① $$\int_a^b[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]\,\mathrm{d}t=\alpha\int_a^b x_1(t)\,\mathrm{d}t+\beta\int_a^b x_2(t)\,\mathrm{d}t \tag{7.1-4}$$

② $$\left\|\int_a^b x_1(t)\,\mathrm{d}t\right\|\leqslant\int_a^b\|x(t)\|\,\mathrm{d}t \tag{7.1-5}$$

③ $$f\left(\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t\right)=\int_a^b f(x(t))\,\mathrm{d}t \tag{7.1-6}$$

证 (1) 与微积分中可积性定理的证明类似，略去证明.

(2) 仅证③. $\forall\ f\in X^*$，

$$\begin{aligned}f\left(\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t\right)&=f\left(\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}x(\xi_i)\,\Delta t_i\right)\\&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x(\xi_i))\,\Delta t_i=\int_a^b f(x(t))\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$ □

定理 7.1.3 设 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上的抽象函数.

(1) 若 $x'(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 N-L 公式成立. 即

$$\int_a^b x'(t)\,\mathrm{d}t=x(b)-x(a) \tag{7.1-7}$$

(2) 若 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，则存在 $\xi\in(a,b)$，满足

$$\|x(b)-x(a)\|\leqslant(b-a)\|x'(\xi)\| \tag{7.1-8}$$

(3) 若 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令 $y(t)=\int_a^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$，$(t\in[a,b])$，则抽象函数 $y(t)$ 在 $[a,b]$ 上可微，并且

$$y'(t)=x(t)\qquad t\in[a,b] \tag{7.1-9}$$

证 (1) $\forall f\in X^*$，作函数 $g(t)=f(x(t))$，则

$$g'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x(t+\Delta t))-f(x(t))}{\Delta t}$$

$$=f\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\right)=f(x'(t))$$

由于 $x'(t)$连续，故 $f(x'(t))$也连续．由 N－L 公式，有

$$\int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t=g(b)-g(a)$$

或

$$\int_a^b f(x'(t))\,\mathrm{d}t=f(x(b))-f(x(a))$$

故

$$f\left[\int_a^b x'(t)\,\mathrm{d}t-(x(b)-x(a))\right]=0 \tag{7.1-10}$$

如果 $\int_a^b x'(t)\,\mathrm{d}t\neq x(b)-x(a)$，由 Hahn－Banach 定理，可取 $f_0\in X^*$，$\|f_0\|=1$，有

$$f_0\left[\int_a^b x'(t)\,\mathrm{d}t-(x(b)-x(a))\right]=\left\|\int_a^b x'(t)\,\mathrm{d}t-(x(b)-x(a))\right\|\neq 0 \tag{7.1-11}$$

由(7.1－10)、(7.1－11)式可得出矛盾，故有 $\int_a^b x'(t)\,\mathrm{d}t=x(b)-x(a)$．

(2) 如果 $x(b)-x(a)=0$ 时，(7.1－8)式显然成立．否则由 Hahn－Banach 定理，取 $f_0\in X^*$，$\|f_0\|=1$，满足 $f_0[x(b)-x(a)]=\|x(b)-x(a)\|$．令 $g(t)=f_0(x(t))$，显然 $g(t)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可微，由 Lagrange 中值定理，有

$$g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a)=f_0(x'(\xi))(b-a)$$

$$\leqslant\|f_0\|\,\|x'(\xi)\|(b-a)=\|x'(\xi)\|(b-a)\qquad \xi\in(a,b)$$

根据 $g(t)$定义，有

$$\|x(b)-x(a)\|=f_0[x(b)-x(a)]=f_0(x(b))-f_0(x(a))$$

$$=g(b)-g(a)\leqslant\|x'(\xi)\|(b-a)$$

(3) 由于 $x(t)$在$[a,b]$上连续，故 $x(t)$在$[a,b]$上一致连续，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|s-t|<\delta$时，有 $\|x(s)-x(t)\|<\varepsilon$ 于是当 $0<|\Delta t|<\delta$时，有

$$\left\|\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}-x(t)\right\|=\left\|\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}x(s)\,\mathrm{d}s-x(t)\right\|$$

$$=\left\|\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}[x(s)-x(t)]\,\mathrm{d}s\right\|$$

$$=\frac{1}{|\Delta t|}\left\|\int_t^{t+\Delta t}[x(s)-x(t)]\,\mathrm{d}s\right\|$$

$$\leqslant\frac{1}{|\Delta t|}\int_t^{t+|\Delta t|}\|x(s)-x(t)\|\,\mathrm{d}s<\frac{1}{|\Delta t|}\int_t^{t+|\Delta t|}\varepsilon\,\mathrm{d}s=\varepsilon$$

故有

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}-x(t)\right\|=0$$

即有 $y'(t)=x(t)$. □

注 7.1.1 称(7.1-8)式为抽象函数的中值公式. 一般说来，抽象函数的中值公式不能写成等式的形式. 例如 $\boldsymbol{x}: [0, 2\pi]\to\mathbf{R}^2$，$\boldsymbol{x}(t)=(\cos t, \sin t)$ 映$[0, 2\pi]$为 $\mathbf{R}^2$ 中的单位圆. 显然 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}(2\pi)$，$\forall \xi\in(0, 2\pi)$，$\|\boldsymbol{x}'(\xi)\|=\sqrt{(-\sin\xi)^2+(\cos\xi)^2}=1$，$\boldsymbol{x}(2\pi)-\boldsymbol{x}(0)\neq \boldsymbol{x}'(\xi)(2\pi-0)$.

定理 7.1.4 设 $x_n(t)$为$[a, b]$上的连续抽象函数列，若 $x_n(t)$在$[a, b]$上一致收敛于 $x(t)$，则

(1) $x(t)$为$[a, b]$上的连续抽象函数；

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t \tag{7.1-12}$$

□

上面我们讨论的抽象函数的 Riemann 积分，是微积分中 Riemann 积分到抽象空间的推广. 同样地，我们可以将 Lebesgue 积分推广到抽象空间，从而得到抽象函数的 Lebesgue 积分. 这里就不讨论了，有兴趣的读者可参看文献[15].

7.2 导 算 子

设 X_1，X_2 均为实 Banach 空间，与微积分一样来考虑算子 $F: D(\subset X_1)\to X_2$ 的"微分". 这里介绍两种最基本的微分，一种是弗里歇(Frechet)意义下的强微分，它是全微分概念的推广；另一种是加脱(Gâteaux)意义下的弱微分，它是方向导数概念的推广.

7.2.1 弗里歇导算子

在微积分中，$f: \mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$，$f(x)$的导数由下式定义：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{7.2-1}$$

若 $F: X_1\to X_2$，此时表达式

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

已失去意义(因为分母出现了 X_1 中的元素 Δx). 因此，导数概念不能简单地进行推广. 再看函数的微分，对于一元函数 $f(x)$，$x\in\mathbf{R}^1$，有

$$f(x+\Delta x)-f(x)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)=f'(x)\Delta x+o(\Delta x) \tag{7.2-2}$$

对于多元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\mathbf{R}^n$，有

$$\begin{aligned}f(x+\Delta x)-f(x)&=f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \cdots, x_n+\Delta x_n)-f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\&=\sum_{i=1}^n a_i\Delta x_i+o(\rho)\cdot\rho=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\Delta x_i+o(\rho)\cdot\rho\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n)^{\mathrm{T}}+o(\rho)\cdot\rho\\&=f'(x)\cdot(\Delta x)^{\mathrm{T}}+o(\rho)\cdot\rho\end{aligned} \tag{7.2-3}$$

其中 $f'(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$，$\Delta\boldsymbol{x}=(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)$，$\rho=\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$o(\rho)\to 0$ $(\rho\to 0)$. (7.2－2)、(7.2－3)式中避免了在分母中出现 X_1 中的元素 $\Delta\boldsymbol{x}$，由此可启发人们作出如下的定义.

定义 7.2.1(弗里歇(Frechet)微分，F 导算子) 设 $D\subset X_1$ 是开集，$F: D\to X_2$，$x_0\in D$，若存在 $T\in B(X_1\to X_2)$，$\forall h\in X_1(x_0+h\in D)$，都有

$$F(x_0+h)-F(x_0)=Th+\omega(x_0,h) \tag{7.2－4}$$

其中

$$\|\omega(x_0,h)\|=o(\|h\|)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|}=0\right)$$

称算子 F 在 x_0 点 Frechet 可微. Th 叫做 F 在 x_0 点处关于 h 的 **Frechet 微分或强微分**，记为 $\mathrm{d}F(x_0,h)$. 算子 T 称为 F 在 x_0 处的 **Frechet 导算子**，记为 $F'(x_0)$. 其中 $B(X_1\to X_2)$ 表示 $X_1\to X_2$ 的线性有界算子的全体构成的 Banach 空间.

(7.2－4)式可以写成

$$F(x_0+h)-F(x_0)=F'(x_0)h+\omega(x_0,h) \tag{7.2－5}$$

注 7.2.1 (1) 定义 7.2.1 中的(7.3－5)式等价于

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|F(x_0+h)-F(x_0)-F'(x_0)h\|}{\|h\|}=0 \tag{7.2－6}$$

有人就是用(7.2－6)式来定义算子 F 在 x_0 点的 Frechet 导算子的.

(2) 由定义 7.2.1 知 $x_0\in D$，若 $F'(x_0)$ 存在，则 $F'(x_0)\in B(X_1\to X_2)$，当 x_0 改变时，$F'(x_0)$ 也改变，故 $F'(\cdot)$ 可以看作 $D\to B(X_1\to X_2)$ 的映射，即

$$F': D\to B(X_1\to X_2) \tag{7.2－7}$$

此时称 F' 为 F 的导映射，一般说来，$F'(x_0)$ 关于 x_0 不是线性的，也不必连续. 我们约定如果 $F'(x_0)$ 在 x_0 的某一邻域内存在且连续，则称算子 F 在 x_0 的邻域内是连续可微的，记为 $F\in C^1$.

由定义 7.2.1，显然有下面定理.

定理 7.2.1 设 $F: D\to X_2$，$F_i: D\to X_2(i=1,2)$，$\alpha,\beta\in\mathbf{R}^1$.

(1) 若 F 的 Frechet 导算子存在，则必唯一.

(2) 若 F_1，F_2 均在 $x_0\in D$ 点 Frechet 可微，则

$$(\alpha F_1+\beta F_2)'(x_0)=\alpha F_1'(x_0)+\beta F_2'(x_0) \tag{7.2－8}$$

(3) 若 F 在 x_0 点 Frechet 可微，则 F 在 x_0 点连续.

(4) 常映射的 Frechet 导算子是零算子.

(5) 若 F 是线性有界算子，则 $F'(x)=F$.

证 仅证(3)与(5)，其余留作练习. 由于 F 在 x_0 点 Frechet 可微，故 $\forall h\in X_1$，$x_0+h\in D$，有

$$\begin{aligned}\|F(x_0+h)-F(x_0)\|&=\|F'(x_0)h+\omega(x_0,h)\|\\&\leqslant\|F'(x_0)\|\,\|h\|+\|\omega(x_0,h)\|\to 0\qquad h\to 0\end{aligned}$$

即 F 在 x_0 点连续. 下证(5)，由于 F 线性有界，故 $\forall h\in X_1$ 有

$$F(x_0+h)-F(x_0)=F(x_0+h-x_0)=F(h)+0$$

即 $F'(x_0)=F$. □

例 7.2.1 设 f: $C[0,1]\to\mathbf{R}^1$，其定义如下：

$$f(x)=\int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t$$

求 $f'(x)$.

解 $\forall h\in C[0,1]$，$x(t)\in C[0,1]$，有

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^1[(x+h)^2-x^2]\,\mathrm{d}t=\int_0^1 2x(t)h(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 h^2(t)\,\mathrm{d}t$$

令 $g(t)=2\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$，($g'(t)=2x(t)$)，则

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}g(t)+\int_0^1 h^2(t)\,\mathrm{d}t=f'(x)h(t)+\omega(x,h)$$

其中 $f'(x)=\int_0^1\cdot\,\mathrm{d}g(t)$，$\omega(x,h)=\int_0^1 h^2(t)\,\mathrm{d}t$($\|\omega(x,h)\|\leqslant\|h^2(t)\|=o(\|h\|)$). 故 $f'(x)=\int_0^1\cdot\,\mathrm{d}g(t)\in(C[0,1])^*$. 在线性等距同构意义下，可记 $f'(x)=g(t)\in(C[0,1])^*=V_0[0,1]=\{g(t)\mid g(0)=0$，在$[0,1]$上右连续的有界变差函数$\}$.

例 7.2.2 设 F: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$，定义如下：

$$\boldsymbol{y}=F(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,\ \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in\mathbf{R}^m$$

即

$$y_i=F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\qquad i=1,2,\cdots,m$$

若 $F_i\in C^1(D)$，D 为 $\mathbf{R}^n$ 中某一开集. $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in\mathbf{R}^n$，有

$$F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}F_1(x_1+h_1,\cdots,x_n+h_n)-F_1(x_1,\cdots,x_n)\\ \cdots\\ F_m(x_1+h_1,\cdots,x_n+h_n)-F_m(x_1,\cdots,x_n)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n\left.\dfrac{\partial F_1}{\partial x_i}\right|_{x+\theta_i^1h}h_i\\ \cdots\\ \sum_{i=1}^n\left.\dfrac{\partial F_m}{\partial x_i}\right|_{x+\theta_i^mh}h_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n\dfrac{\partial F_1(x)}{\partial x_i}h_i\\ \cdots\\ \sum_{i=1}^n\dfrac{\partial F_m(x)}{\partial x_i}h_i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})\\ \cdots\\ \omega_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})\end{bmatrix}$$

故 $F(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$点 Frechet 可微，并且有

$$F'(\boldsymbol{x})h=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n\dfrac{\partial F_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}h_i\\ \cdots\\ \sum_{i=1}^n\dfrac{\partial F_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}h_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial F_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\\ \cdots\\ \dfrac{\partial F_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial F_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ \cdots\\ h_n\end{bmatrix}$$

$$F'(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial F_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\\ \cdots\\ \dfrac{\partial F_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial F_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{m\times n}\in\boldsymbol{B}(\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m)$$

这里 $F'(\boldsymbol{x})$是 F的雅可比(Jacobi)矩阵. 特别地，当 $m=1$ 时，有

$$F'(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right) \in \boldsymbol{B}(\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1) = \mathbf{R}^n$$

例 7.2.3 设 $K(t, s, u)$和$\dfrac{\partial K}{\partial u}$是$[0,1]\times[0,1]\times\mathbf{R}^1$ 上有定义而且连续的实值函数，考察 $C[0,1]$到自身的 Urysohn 积分算子，

$$[F(x)](t) = \int_0^1 K(t, s, x(s))\,\mathrm{d}s$$

今证 F在 $x_0\in C[0,1]$处的 Frechet 微分为

$$[F'(x_0)]h(t) = \int_0^1 \frac{\partial K}{\partial u}(t, s, x_0(s))h(s)\,\mathrm{d}s \qquad h\in C[0,1]$$

证 当 $x_0\in C[0,1]$，$\forall h\in C[0,1]$，由于

$$\left|K(t, s, x_0(s)+h(s)) - K(t, s, x_0(s)) - \frac{\partial K}{\partial u}(t, s, x_0(s))h(s)\right|$$

$$= \left|\int_0^1\left[\frac{\partial K}{\partial u}(t, s, x_0(s)+\tau h(s)) - \frac{\partial K}{\partial u}(t, s, x_0(s))\right]h(s)\,\mathrm{d}\tau\right|$$

$$\leqslant \|h\|\int_0^1\left|\frac{\partial K}{\partial u}(t, s, x_0(s)+\tau h(s)) - \frac{\partial K}{\partial u}(t, s, x_0(s))\right|\,\mathrm{d}\tau$$

因为$\dfrac{\partial K}{\partial u}$在$[0,1]\times[0,1]\times\mathbf{R}^1$ 的紧子集上一致连续，故上式中最后一个积分当$\|h\|\to 0$ 时关于 t, s一致地趋向于 0，记

$$Th(t) = \int_0^1 \frac{\partial K}{\partial u}(t, s, x_0(s))h(s)\,\mathrm{d}s \qquad h\in C[0,1]$$

即得

$$\|F(x_0+h) - F(x_0) - Th\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\int_0^1[K(t, s, x_0(s)+h(s)) - K(t, s, x_0(s)) - \frac{\partial K}{\partial u}(t, s, x_0(s))h(s)]\,\mathrm{d}s\right| = o(\|h\|)$$

则 $F'(x_0)=T$.

定理 7.2.2(链式法则) 设 X_1，X_2，X_3 均为实 Banach 空间，$D_1\subset X_1$，$D_2\subset X_2$ 均为开集. 算子 F: $D_1\to X_2$，且 $F(D_1)\subset D_2\subset X_2$，$G$: $D_2\to X_3$. 再设 F在 x_0 ($x_0\in D_1$)处 Frechet 可微，G在 $y_0=F(x_0)$处 Frechet 可微，则复合算子 GF: $D_1\to X_3$ 在 x_0 处 Frechet 可微，并有

$$(GF)'(x_0) = G'(y_0)A'(x_0) \tag{7.2-9}$$

证 由于 F在 x_0，G在 $y_0=F(x_0)$处 Frechet 可微，故$\forall h\in X_1$，$x_0+h\in D_1$，有

$$F(x_0+h) - F(x_0) = F'(x_0)h + \omega(x_0, h) \tag{7.2-10}$$

及 $k\in X_2$，$y_0+k\in D_2$，有

$$G(y_0+k) - G(y_0) = G'(y_0)k + \omega(y_0, k) \tag{7.2-11}$$

其中 $\dfrac{\|\omega(x_0, h)\|}{\|h\|}\to 0\ (\|h\|\to 0)$，$\dfrac{\|\omega(y_0, k)\|}{\|k\|}\to 0\ (\|k\|\to 0)$. 把 $\omega(y_0, k)$记为 $\|k\|\,\omega_1(y_0, k)$，当$\|k\|\to 0$ 时有$\|\omega_1(y_0, k)\|\to 0$.

在(7.2-11)中取 k为

$$k = F(x_0 + h) - F(x_0) = F(x_0 + h) - y_0 \qquad (7.2-12)$$

由定理 7.2.1 知当 $\|h\| \to 0$ 时，$\|k\| \to 0$，把(7.2-12)式代入(7.2-11)式有

$$\begin{aligned} GF(x_0 + h) - GF(x_0) &= G(y_0 + k) - G(y_0) = G'(y_0)k + \|k\|\omega(y_0, k) \\ &= G'(y_0)[F'(x_0)h + \omega(x_0, h)] + \|k\|\omega(y_0, k) \\ &= G'(y_0)F'(x_0)h + G'(y_0)\omega(x_0, h) + \|k\|\omega_1(y_0, k) \\ &= G'(y_0)F'(x_0)h + \omega_2(x_0, h) \end{aligned}$$

其中 $\omega_2(x_0, h) = G'(y_0)\omega(x_0, h) + \|k\|\omega_1(x_0, k)$.

$$\frac{\|\omega_2(x_0, h)\|}{\|h\|} \leqslant \|G'(y_0)\| \frac{\|\omega(x_0, h)\|}{\|h\|} + \frac{\|k\|}{\|h\|}\|\omega_1(y_0, k)\|$$

而
$$\frac{\|k\|}{\|h\|} = \frac{\|F'(x_0)h + \omega(x_0, h)\|}{\|h\|} \leqslant \|F'(x_0)\| + \frac{\|\omega(x_0, h)\|}{\|h\|}$$

有界. 故有

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega_2(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0$$

于是 $(GF)'(x_0) = G'(y_0)F'(x_0)$. □

推论 7.2.1 如果 $G \in X_2^*$，则 $(GF)'(x_0) = GF'(x_0)$. □

定理 7.2.3(中值公式) 设 $D \subset X$ 为凸集，$f: D \to \mathbf{R}^1$，且 f 在 D 上 Frechet 可微，则当 x_0，$x_0 + h \in D$ 时，有 Lagrange 中值公式

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0 + \xi h)h \qquad \xi \in (0, 1) \qquad (7.2-13)$$

证 令 $\varphi(t) = f(x_0 + th)$，由链式法则，$\varphi'(t) = f'(x_0 + th)h$. 显然函数 $\varphi(t)$ 在[0, 1]上满足 Lagrange 定理的条件，故存在 $\xi \in (0, 1)$，$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)$. 即(7.2-13)成立. □

(7.2-13)式对 f 是泛函时成立，对于一般的非线性算子(7.2-13)式并非均成立(注 7.1.1). 对一般的非线性算子 F，有以下较弱的结果.

定理 7.2.4 设 X_1，X_2 是实的 Banach 空间，$D \subset X_1$ 为凸开集，$F: D \to X_2$ 在 D 上 Frechet 可微，对任意 $x_0 \in D$，$h \in X_1$，$x_0 + h \in D$，$\forall f \in X_2^*$，则 $\exists\, \xi \in (0, 1)$ 满足

$$f[F(x_0 + h) - F(x_0)] = f[F'(x_0 + \xi h)h] \qquad (7.2-14)$$

证 令 $\varphi(x) = f[F(x)]$，则 $\varphi: D \to \mathbf{R}^1$. 由于 F 在 D 上 Frechet 可微，故 φ 在 D 上也 Frechet 可微，且有 $\varphi'(x) = f[F'(x)]$. 由定理 7.2.3 知，存在 $\xi \in (0, 1)$，有

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \xi h)h$$

即

$$\begin{aligned} f[F(x_0 + h) - F(x_0)] &= f[F(x_0 + h)] - f[F(x_0)] \\ &= \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \xi h)h \\ &= f[F'(x_0 + \xi h)]h = f[F'(x_0 + \xi h)h] \end{aligned}$$ □

定理 7.2.5 设 X_1，X_2 均为实 Banach 空间，$D \subset X_1$ 为凸开集，$F: D \to X_2$ Frechet 可微，则有

(1) 对任何 $x_0 \in D$，$h \in X_1$，$x_0 + h \in D$，有

$$\|F(x_0 + h) - F(x_0)\| \leqslant \|F'(x_0 + \xi h)h\| \qquad \xi \in (0, 1) \qquad (7.2-15)$$

(2) 若 $F'(x)$ 在 D 上连续，则

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_0^1 F'(x_0+th)h\,\mathrm{d}t \tag{7.2-16}$$

证 (1) 若 $F(x_0+h)-F(x_0)=0$，不等式(7.2-15)自然成立，否则，由 Hahn-Banach 定理知存在 $f_0\in X_2^*$，$\|f_0\|=1$，有

$$f_0[F(x_0+h)-F(x_0)]=\|F(x_0+h)-F(x_0)\|$$

考虑泛函 $\varphi(x)=f_0[F(x)]$，显然 $\varphi(x)$在 D上 Frechet 可微，由定理 7.2.4，有

$$f_0[F(x_0+h)-F(x_0)]=f_0[F'(x_0+\theta h)h]$$

故

$$\begin{aligned}\|F(x_0+h)-F(x_0)\| &= f_0[F(x_0+h)-F(x_0)]\\ &\leqslant \|f_0\|\,\|F'(x_0+\theta h)h\|\\ &= \|F'(x_0+\theta h)h\|\end{aligned}$$

(2) 考虑抽象函数 $y(t)=F(x_0+th)$，$0\leqslant t\leqslant 1$. 由链式法则 $y'(t)=F'(x_0+th)h$. 由于 $F'(x)$在 D上连续，故 $y'(t)$对 $t(0\leqslant t\leqslant 1)$连续. 根据定理 7.1.3(1)，有

$$\int_0^1 y'(t)\,\mathrm{d}t=y(1)-y(0)$$

即
$$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_0^1 F'(x_0+th)h\,\mathrm{d}t$$
□

7.2.2 加脱导算子

在多元函数微分学中，函数可微，则偏导数存在(沿任何方向的方向导数也存在)，反之则不然. 这表明对于多元函数可微强于可导. 由算子 Frechet 微分的定义看出，它是多元函数全微分概念在 Banach 空间中的推广. 由于方向导数对函数的要求较弱，很自然地，人们希望把方向导数的概念推广到 Banach 空间. 从而引入加脱(Gateaux)微分的概念.

定义 7.2.2(加脱(Gateaux)导算子) 设 $F: D\to X_2$(D为 X_1 中的开集)，$x_0\in D$. 若 $\forall\, h\in E$，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x_0+th)-F(x_0)}{t} \tag{7.2-17}$$

存在，称算子 F在 x_0 点 **Gateaux 可微**，该极限称为 F在 x_0 处沿 h方向的 Gateaux 微分，记为 $\mathrm{D}F(x_0, h)$. 如 $\mathrm{D}F(x_0, h)$可以表示成 Th. 其中 $T\in B(X_1\to X_2)$，则称 F在 x_0 点具有**线性有界 Gateaux 微分**或**弱微分**，并称 T是 F在 x_0 处的 **Gateaux 导算子**，仍记为 $F'(x_0)$，此时有

$$\mathrm{D}F(x_0, h)=F'(x_0)h \tag{7.2-18}$$

注 7.2.2 算子的 Gateaux 微分是函数方向导数概念的推广，它的定义仅涉及 X_2 中的范数而未涉及 X_1 中的范数，因此无法从 Gateaux 可微推出算子的连续性. 在微积分中，多元函数沿任何方向的方向导数存在，也未必保证函数连续就是一例.

特别地，如果 $X_2=\mathbf{R}^1$，$f: X_1\to\mathbf{R}^1$ 是 X_1 上的泛函(一般来说是非线性的)，当 f的弱微分存在时，有

$$\mathrm{D}f(x_0, h)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} \tag{7.2-19}$$

此时称 $\mathrm{D}f(x_0, h)$为泛函 f的**一阶变分**，通常记为 $\delta f(x_0, h)$.

若令 $\varphi(t)=f(x_0+th)$，则 φ：$\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$ 是函数，并且

$$\delta f(x_0, h)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\varphi(\alpha)-\varphi(0)}{\alpha}=\varphi'(\alpha)\mid_{\alpha=0}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}f(x_0+\alpha h)\mid_{\alpha=0} \tag{7.2-20}$$

例 7.2.4 设 $X=C[0, 1]$，考虑定义在 X 上的泛函

$$f(x)=\int_0^1 g(x(t), t)\,\mathrm{d}t$$

其中二元函数 $g(x, t)$ 的偏导数 $g_x'(x, t)$ 是连续函数，则对任何 $h(t)\in C[0, 1]$，根据(7.2-20)式，有

$$\begin{aligned}\delta f(x_0, h)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^1 g(x_0(t)+\alpha h(t), t)\,\mathrm{d}t\mid_{\alpha=0}\\&=\int_0^1 g_x'(x_0(t), t)h(t)\,\mathrm{d}t\\&=f'(x_0)h\end{aligned}$$

其中 $f'(x_0)=\int_0^1 g_x'(x_0(t), t)(\cdot)\,\mathrm{d}t$ 是 $C[0, 1]$ 上线性有界泛函，因此 f 是 Gateaux 可微的.

例 7.2.5 设 $X=C^1[a, b]$，考虑泛函

$$J(x)=\int_a^b g(x(t), x'(t), t)\,\mathrm{d}t$$

其中三元函数 $g(x, u, t)$ 连续，并且 g 具有连续二阶偏导数，则对任意 $h(t)\in C^1[a, b]$ 有

$$\begin{aligned}\delta J(x, h)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_a^b g[x(t)+\alpha h(t), x'(t)+\alpha h'(t), t]\,\mathrm{d}t\mid_{\alpha=0}\\&=\int_a^b g_x'[x(t), x'(t), t]h(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b g_{x'}'[x(t), x'(t), t]h'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

把第二个积分进行分部积分，得

$$\begin{aligned}\int_a^b g_{x'}'[x(t), x'(t), t]h'(t)\,\mathrm{d}t=&\ g_{x'}'[x(t), x'(t), t]h(t)\mid_a^b\\&-\int_a^b h(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_{x'}'[x(t), x'(t), t]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

这样一来，则对于在 a，b 都取零值的 $h(t)$（这样的 $h(t)$ 构成的集合在最优化中称为**容许集**），都有

$$\delta J(x, h)=\int_a^b\left(g_x'-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_{x'}'\right)h(t)\,\mathrm{d}t=J'(x)h$$

其中 $J'(x)=\int_a^b\left(g_x'-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_{x'}'\right)(\cdot)\,\mathrm{d}t$ 是 X 到 $\mathbf{R}^1$ 的线性有界泛函.

在定义 7.2.2 中，Gateaux 导算子的记号与 Frechet 导算子的记号相同，在证明了下述的定理以后，便知使用相同记号不会发生混淆.

定理 7.2.6 设 X_1，X_2 是实的 Banach 空间，F：$D\to X_2$（$D\subset X_1$ 是开集）.

(1) 若 F 在 x_0 点 Frechet 可微，则 F 在 x_0 点具有线性有界 Gateaux 微分，且有

$$\mathrm{D}F(x_0, h)=\mathrm{d}F(x_0, h) \tag{7.2-21}$$

(2) 若 F 在 x_0 点具有线性有界 Gateaux 微分，且 Gateaux 导映射 $F'(\cdot)$ 在 x_0 点连续，则 F 在 x_0 点 Frechet 可微.

证 结论(1)显然成立，下证结论(2).

由 Gateaux 导映射 $F'(\cdot)$ 在 x_0 点连续，故对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\|h\|<\delta$ 时，有

$$\|F'(x_0+h)-F'(x_0)\|<\varepsilon \tag{7.2-22}$$

其中，$F'(x_0+h)$、$F'(x_0)$ 均表示 F 的 Gateaux 导算子. 下面证明：当 $0\leqslant\|h\|<\delta$ 时，恒有

$$\frac{\|F(x_0+h)-F(x_0)-F'(x_0)h\|}{\|h\|}<\varepsilon$$

或
$$\|F(x_0+h)-F(x_0)-F'(x_0)h\|<\varepsilon\|h\| \tag{7.2-23}$$

不妨假定 $F(x_0+h)-F(x_0)-F'(x_0)h\neq 0$，不然，(7.2-23)式自然成立. 由 Hahn-Banach 定理知，存在 $f\in X_2^*$，$\|f\|=1$，满足

$$f[F(x_0+h)-F(x_0)-F'(x_0)h]=\|F(x_0+h)-F(x_0)-F'(x_0)h\|$$

考虑函数 $\varphi(t)=f[F(x_0+th)]$，$t\in[0,1]$，$\varphi'(t)=f[F'(x_0+th)h]$，其中 $F'(x_0+th)$ 表示 Gateaux 导算子. 应用微分中值定理，可得

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\xi)\qquad \xi\in(0,1)$$

即
$$f[F(x_0+h)-F(x_0)]=f[F'(x_0+\xi h)h]$$

从而

$$\begin{aligned}\|F(x_0+h)-F(x_0)-F'(x_0)h\| &= f[F(x_0+h)-F(x_0)-F'(x_0)h]\\ &= f[F'(x_0+\xi h)h-F'(x_0)h]\\ &\leqslant \|f\|\,\|F'(x_0+\xi h)-F'(x_0)\|\,\|h\|\\ &= \|F'(x_0+\xi h)-F'(x_0)\|\,\|h\|<\varepsilon\|h\|\end{aligned}$$

即(7.2-23)式成立. □

例 7.2.6 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$，定义为：当 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$ 时，

$$f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2)=\begin{cases}x_1+x_2+\dfrac{x_1^3x_2}{x_1^4+x_2^2} & \boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\neq(0,0)\\ 0 & \boldsymbol{x}=(x_1,x_2)=(0,0)\end{cases}$$

由于

$$\left|\frac{x_1^3x_2}{x_1^4+x_2^2}\right|=|x_1|\left|\frac{x_1^2x_2}{x_1^4+x_2^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|x_1|$$

故 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 点连续，对 $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2)\in\mathbf{R}^2$，有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\frac{f(\mathbf{0}+t\boldsymbol{h})-f(\mathbf{0})}{t}&=\lim_{t\to0}\frac{th_1+th_2+\dfrac{t^4h_1^3h_2}{t^4h_1^4+t^2h_2^2}}{t}\\ &=h_1+h_2=(1,1)(h_1,h_2)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

故 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 点具有 Gateaux 导数 $f'(\mathbf{0})=(1,1)$，而 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbf{0}$ 点不是 Frechet 可微的. 事实上，如果 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $x=\mathbf{0}$ 点 Frechet 可微，则由定理 7.2.6，有

$$\mathrm{d}f(\mathbf{0},\boldsymbol{h})=\mathrm{D}f(\mathbf{0},\boldsymbol{h})=f'(\mathbf{0})\boldsymbol{h}=h_1+h_2$$

于是

$$f(\mathbf{0}+\boldsymbol{h})-f(\mathbf{0})-f'(\mathbf{0})\boldsymbol{h}=\frac{h_1^3h_2}{h_1^4+h_2^2}=\omega(\mathbf{0},\boldsymbol{h})$$

而

$$\frac{\|\omega(\mathbf{0},\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|}=\frac{|h_1^3h_2|}{(h_1^4+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

特取 $h_2=h_1^2$，并令 $h_1\to 0$，有

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0}\frac{\|\omega(\mathbf{0},\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|}=\lim_{h_1\to 0}\frac{|h_1^5|}{2h_1^4\sqrt{h_1^2+h_1^4}}=\frac{1}{2}\neq 0$$

这与 $\omega(\mathbf{0},\boldsymbol{h})=o(\|\boldsymbol{h}\|)$相矛盾，故 f 在 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 点 Frechet 不可微.

定理 7.2.7 设 $F: D\to X_2$ ($D\subset X_1$ 为开集)，$x_0\in D$，A 在 x_0 点 Frechet 可微$\Longleftrightarrow F$满足以下两条件：

(1) F 在 x_0 点具有线性有界 Gateaux 微分 Th；

(2) 极限

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{t}[F(x_0+th)-F(x_0)]-Th\right\}=0 \tag{7.2-24}$$

关于 $\|h\|=1$ 一致成立. 此时 F 在 x_0 点的 Frechet 导算子 $F'(x_0)=T$.

注 7.2.3 (7.2-24)式中关于 $\|h\|=1$ 一致成立是指：对任意 $\varepsilon>0$，存在仅与 ε 有关，而与 $h(\|h\|=1)$无关的 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $0<|t|<\delta$时，对任何 $\|h\|=1$，都有

$$\left\|\frac{1}{t}[F(x_0+th)-F(x_0)]-Th\right\|<\varepsilon \tag{7.2-25}$$

证 $\Leftarrow$ 由条件(1)、(2)，设 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $0<|t|<\delta$时，对任何 $\|h\|=1$，(7.2-25)式成立，则 $\forall u\in X_1$，$x_0+u\in D$，下证：当 $0<\|u\|<\delta$时，有

$$\frac{\|F(x_0+u)-F(x_0)-Tu\|}{\|u\|}<\varepsilon$$

事实上，对上述的 u，必存在 $h\in S_1(0)=\{x\in X_1\mid\|x\|=1\}$，使 $u=th$，$t\in(0,+\infty)$. 当 $0<\|u\|<\delta=\delta(\varepsilon)$时，应用不等式(7.2-25)，有

$$\frac{\|F(x_0+u)-F(x_0)-Tu\|}{\|u\|}=\frac{\|F(x_0+th)-F(x_0)-Tth\|}{|t|}<\varepsilon$$

即当 $0<\|u\|<\delta(\varepsilon)$时，有 $\|F(x_0+u)-F(x_0)-Tu\|<\varepsilon\|u\|$，故 F 在 x_0 点 Frechet 可微且有 $F'(x_0)=T$.

$\Rightarrow$ 设 F 在 x_0 点 Frechet 可微，则 F 在 x_0 点 Gateaux 可微，并且具有线性有界 Gateaux 微分 Th，且 $T=F'(x_0)$ ($F'(x_0)$是 Frechet 导算子). 下证(7.2-24)式关于 $\|h\|=1$ 一致成立. 由 F 在 x_0 点 Frechet 可微，故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<\|u\|<\delta$时，有

$$\|F(x_0+u)-F(x_0)-F'(x_0)u\|<\varepsilon\|u\| \tag{7.2-26}$$

$\forall h\in S_1(0)$，当 $0<|t|<\delta$时，由(7.2-26)式，有

$$\|F(x_0+th)-F(x_0)-F'(x_0)th\|<\varepsilon|t|\,\|h\|=\varepsilon|t|$$

即

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x_0+th)-F(x_0)}{t}=F'(x_0)h$$

关于 $\|h\|=1$ 一致成立. □

7.3 高 阶 导 算 子

在微积分中，为了研究函数在某点的局部性质，需要讨论函数在该点的高阶导数. 类似地，为了更好地了解非线性算子在某点的局部性态，也需要讨论算子的高阶导算子. 本节介绍非线性算子的高阶导算子，并建立其泰勒(Taylor)公式.

7.3.1 n重线性算子

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n个实线性赋范空间，它们具有范数 $\|\cdot\|_k$, $k=1, 2, \cdots, n$, 用 $\coprod_{k=1}^{n} X_k$ 表示它们的乘积空间，并在 $\coprod_{k=1}^{n} X_k$ 上赋予范数

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_k \qquad x=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \coprod_{k=1}^{n} X_k \tag{7.3-1}$$

容易证明：在范数(7.3-1)式下 $\coprod_{k=1}^{n} X_k$ 是实线性赋范空间. 特别地，当 X_k, $k=1, 2, \cdots, n$, 是 Banach 空间时，$\coprod_{k=1}^{n} X_k$ 也是 Banach 空间.

定义 7.3.1(*n*重线性算子) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, Y$ 是 $n+1$ 个实 Banach 空间，A: $\coprod_{k=1}^{n} X_k \to Y$. 如果 $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$中对于任何固定的$(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n)$, 算子

$$A_k x_k = A(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) \tag{7.3-2}$$

是 X_k 到 Y的线性算子($k=1, 2, \cdots, n$)，称 A是 n重线性算子；如果存在 $M>0$，对 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \coprod_{k=1}^{n} X_k$, 恒有

$$\|A(x_1, x_2, \cdots, x_n)\| \leqslant M\|x_1\|_1 \|x_2\|_2 \cdots \|x_n\|_n \tag{7.3-3}$$

则称 A是 n重线性有界算子.

如果 A 是 n重线性有界算子，可以用

$$\|A\| = \sup_{\|x_1\|_1 \leqslant 1, \cdots, \|x_n\|_n \leqslant 1} \|A(x_1, x_2, \cdots, x_n)\| \tag{7.3-4}$$

定义 A的范数. 把 $\coprod_{k=1}^{n} X_k \to Y$的 n重线性有界算子的全体记为 $B(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y)$, 易证 $B(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y)$构成Banach 空间. 特别地，当 $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$时，记为 $B(X \times \cdots \times X \to Y)$.

例 7.3.1 (1) 设 $f_1(x, y) = xy$, 则 $f_1: \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ 是二重线性有界算子；

(2) 设空间向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^3$, $f_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^1$ 是 $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^1$ 的 2 重线性有界算子.

(3) 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^3$, $f_3(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^1$, 则 f_3 是 $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^1$ 的 3 重线性有界算子.

再记

$$B_1(X \to Y) = B(X \to Y)$$
$$B_2(X \to Y) = B(X \to B_1(X \to Y))$$
$$\cdots$$
$$B_n(X \to Y) = B(X \to B_{n-1}(X \to Y))$$
$$= \underbrace{B(X \to B(X \to B(X \to \cdots B(X \to Y)\cdots)))}_{n个B} \tag{7.3-5}$$

下面定理建立了 $B(X\times\cdots\times X\to Y)$与 $B_n(X\to Y)$之间等价关系.

定理 7.3.1 空间 $B(X\times\cdots\times X\to Y)$与 $B_n(X\to Y)$线性等距同构.

证 仅对 $n=2$ 时证明结论.

首先建立 $B(X\times X\to Y)$与 $B_2(X\to Y)$之间的一一映射. 对 $A\in B(X\times X\to Y)$，对固定 $x\in X$，定义 $X\to Y$ 的映射

$$A_x \xlongequal{\text{def}} A(x, \cdot)$$

则 $A_x\in B(X\to Y)$. 对 $x\in X$，令

$$Bx = A_x = A(x, \cdot) \tag{7.3-6}$$

因为 $A(\cdot, \cdot)$是二重线性有界的，所以 B是 $X\to B(X\to Y)$的线性算子，并有 $\|Bx\| = \|A_x\| = \sup\limits_{\|y\|=1}\|A(x, y)\| \leqslant \|A\|\|x\|$，故 B为有界算子，即 $B\in B(X\to B(X\to Y))= B_2(X\to Y)$，且

$$\|B\| \leqslant \|A\| \tag{7.3-7}$$

由(7.3-6)式可定义 $B(X\times X\to Y)\to B_2(X\to Y)$的映射 T：

$$T(A) = B \tag{7.3-8}$$

易证 T是线性且为一一映射.

其次证明 T是满映射. 事实上，对 $B\in B_2(X\to Y)= B(X\to B(X\to Y))$，令

$$A(x_1, x_2) = (Bx_1)x_2 \qquad x_1, x_2 \in X$$

则 A是二重线性的，且

$$\|A(x_1, x_2)\| = \|(Bx_1)x_2\| \leqslant \|Bx_1\|\|x_2\|$$
$$\leqslant \|B\|\|x_1\|\|x_2\|$$

即 $A\in B(X\times X\to Y)$，且

$$\|A\| \leqslant \|B\| \tag{7.3-9}$$

此时$(Bx)(\cdot) = A(x, \cdot)$，即 $Bx= A_x$，从而 $TA= B$，故 T是满射. 再由(7.3-7)及(7.3-9)式知 T保持范数不变，故 $B(X\times X\to Y)$与 $B_2(X\to Y)$是等距同构的. □

既然 Banach 空间 $B(X\times\cdots\times X\to Y)$与 $B_n(X\to Y)$等距同构，总可以把两空间的对应点不加区别，即若 $A\in B(X\times\cdots\times X\to Y)$，$B\in B_n(X\to Y)$，且 $TA= B$，则 $A= B$，或 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in X\times\cdots\times X$，有

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\cdots(Bx_1)x_2\cdots)x_n \tag{7.3-10}$$

注 7.3.1 (1) 在上述等距同构意义下，有

$$B(\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{n个X}\to Y) = B(\underbrace{X\times\cdots\times X}_{k个X}\to B(\underbrace{X\times\cdots\times X}_{n-k个X}\to Y))$$

(2) 线性泛函分析中的共鸣定理可以推广到 n重线性有界算子族.

设 $A_\alpha\in B(X\times\cdots\times X\to Y)(\alpha\in \Lambda)$是 n重线性有界算子族，若对任何 $x=(x_1, x_2, \cdots,$

$x_n) \in (X \times \cdots \times X)$，都有

$$\sup_{\alpha \in \Lambda} \| A_\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n) \| < +\infty$$

则

$$\sup_{\alpha \in \Lambda} \| A_\alpha \| < +\infty$$

（3）n重线性算子 A 对每个变元连续$\Longleftrightarrow A \in B(X \times \cdots \times X \to Y)$.

7.3.2　高阶导算子

设 $F: D \to X_2$（$D \subset X_1$ 为开集），F 在 D 中每一点都 Frechet 可微，则 F 的 Frechet 导算子 $F'(x)$随 x 而变化，此时 $F': D \to B(X_1 \to X_2)$.

定义 7.3.2(高阶导算子)　若映射 $F': D \to B(X_1 \to X_2)$在 x_0 点 Frechet 可微，则称 F' 在 x_0 点的 Frechet 导算子为 F 在 x_0 点的**二阶 Frechet 导算子**，记为 $F''(x_0)$，即

$$F''(x_0) = (F')'(x_0) \tag{7.3-11}$$

类似地，映射 F''的导算子叫做 F 的三阶 Frechet 导算子. 一般的 F的 n阶导算子定义为

$$F^{(n)}(x) = (F^{(n-1)})'(x) \tag{7.3-12}$$

由定义 7.3.2 知，若 $F: D \to X_2$，则当 $x \in D$时，有

$$F'(x) \in B(X_1 \to X_2)$$
$$F''(x) \in B(X_1 \to B(X_1 \to X_2)) = B_2(X_1 \to X_2)$$
$$\cdots$$
$$F^{(n)}(x) \in B(X_1 \to B(X_1 \to \cdots B(X_1 \to X_2)\cdots)) = B_n(X_1 \to X_2)$$

根据定理 7.3.1 可以看出，$F''(x) \in B(X_1 \times X_1 \to X_2)$，…，$F^{(n)}(x) \in B(X_1 \times \cdots \times X_1 \to X_2)$. 若 $h_1, h_2, \cdots, h_n \in X_1$，有

$$F^{(n)}(x)(h_1, h_2, \cdots, h_n) = (\cdots((F^{(n)}(x))h_1)h_2\cdots)h_n \tag{7.3-13}$$

因此，在讨论 $F^{(n)}(x)$的性质时，只要把 $F^{(n)}(x)$纳入 n重线性有界算子类进行讨论就够了. 为了简单起见，我们把 $F^{(n)}(x)(h_1, h_2, \cdots, h_n)$（或$(\cdots((F^{(n)}(x))h_1)h_2\cdots)h_n$）记为 $F^{(n)}(x)h_1h_2\cdots h_n$. 特别地，当 $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = h$时，简记为 $F^{(n)}(x)h^n$.

在定义 7.2.1 中，用线性算子 $F'(x)$作用于 $h \in X$的结果：$dF(x, h) = F'(x)h$表示 F 的强微分(Frechet 微分)；仿此，可以把 F的**二阶强微分**定义为 $d^2F(x, h) = F''(x)(h, h) = F''(x)h^2$；…；$F$的 **$n$阶强微分**定义为 $d^nF(x, h) = F^n(x)(h, h, \cdots, h) = F^{(n)}(x)h^n$.

下面给出二阶导算子的求法：若存在 $B \in B(X_1 \times X_1 \to X_2)$，对任何 $k \in X_1$ 满足

$$\| F'(x_0 + h)k - F'(x_0)k - Bhk \| \leqslant \| k \| \| h \| \alpha(h) \tag{7.3-14}$$

其中 $\alpha(h) \to 0 (\| h \| \to 0)$，则 $F''(x_0)$存在，且 $F''(x_0) = B$. 实际上，由线性算子范数的定义，有

$$\| F'(x_0 + h) - F'(x_0) - Bh \| \leqslant \| h \| \alpha(h)$$

从而

$$\lim_{\| h \| \to 0} \frac{\| F'(x_0 + h) - F'(x_0) - Bh \|}{\| h \|} = 0$$

即 $F''(x_0) = B$.

例 7.3.2　设泛函 $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$ 定义为

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1^2$$

求 $f''(\boldsymbol{x})$.

解 $f'(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=(x_2+2x_1, x_1)$

取 $\boldsymbol{h}=(h_1, h_2)$，$\boldsymbol{k}=(k_1, k_2)\in\mathbf{R}^2$，有

$$\begin{aligned} f'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})\boldsymbol{k}-f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k} &= [(x_2+h_2)+2(x_1+h_1)]k_1+(x_1+h_1)k_2 \\ &\quad -(x_2+2x_1)k_1 - x_1 k_2 \\ &= h_2 k_1 + 2h_1 k_1 + h_1 k_2 \\ &= (h_1, h_2)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以

$$f''(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}$$

例 7.3.3 设 F: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 定义为

$$\boldsymbol{y} = F(\boldsymbol{x})$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_m)\in\mathbf{R}^m$，$y_i=F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$(i=1, 2, \cdots, m)$且 $F_i\in C^2(\mathbf{R}^n)$，当 $\boldsymbol{h}=(h_1, h_2, \cdots, h_n)\in\mathbf{R}^n$，且 $\|\boldsymbol{h}\|$ 充分小时，对 $\boldsymbol{k}=(k_1, k_2, \cdots, k_n)\in\mathbf{R}^n$，有

$$\begin{aligned} F'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})\boldsymbol{k}-F'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k} &= \left(\frac{\partial F_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})}{\partial x_j}\right)_{m\times n}\boldsymbol{k}-\left(\frac{\partial F_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\right)_{m\times n}\boldsymbol{k} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})}{\partial x_j}-\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\right)k_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_m(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})}{\partial x_j}-\frac{\partial F_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\right)k_j\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 F_1(\boldsymbol{x}+\theta_j^{(1)}\boldsymbol{h})}{\partial x_i \partial x_j}h_i k_j, \cdots, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 F_m(\boldsymbol{x}+\theta_j^{(m)}\boldsymbol{h})}{\partial x_i \partial x_j}h_i k_j\right) \end{aligned}$$

由于 $F_i\in C^2(\mathbf{R}^n)$，故

$$F''(x)\boldsymbol{hk} = \left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 F_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}h_i k_j, \cdots, \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 F_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}h_i k_j\right)$$

因此，$F''(\boldsymbol{x})$为由 $F(x)$的二阶偏导数组成的三维阵

$$F''(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial^2 F_r(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{\substack{r=1,2,\cdots,m\\ i,j=1,2,\cdots,n}}$$

7.3.3 泰勒公式

在微积分中，可以应用函数的高阶导数，把函数在某点附近作泰勒(Taylor)展开，对于 Banach 空间中具有高阶导算子的映射，也有类似的结果，下面几个定理将反映这方面的主要结果.

定理 7.3.2 设 f: $D\to\mathbf{R}^1$($D\subset X$为凸开集)，若 f在 D上具有 $n+1$ 阶 Frechet 导数，

对 $x_0 \in D$，$h \in X$，$x_0 + h \in D$，则存在 $\xi \in (0, 1)$，使得

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \xi h)h^{n+1} \tag{7.3-15}$$

公式(7.3-15)称为泛函 f 在 x_0 点附近的 Taylor 公式.

证 作函数 $\varphi(t) = f(x_0 + th)$，注意到 D 凸开及 f 具有 $n+1$ 阶导数，则 $\varphi(t)$ 在某 $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ 内有定义且具有 $n+1$ 阶导数，且 $\varphi'(t) = f'(x_0 + th)h$，$\varphi''(t) = f''(x_0 + th)h^2$，$\cdots$，$\varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(x_0 + th)h^n$，$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(x_0 + th)h^{n+1}$. 由泰勒定理有

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\xi) \qquad \xi \in (0, 1) \tag{7.3-16}$$

把 $\varphi(t) = f(x_0 + th)$ 代入(7.3-16)式便得(7.3-15)式. □

公式(7.3-15)是泛函 f 的具有 Lagrange 型余项的 Taylor 公式. 进一步，对一般的非线性算子 F，可以得到具有积分型余项及其具有 Peano 型余项的泰勒公式.

定理 7.3.3 设 X_1，X_2 是实 Banach 空间，$F: D \to X_2$（$D \subset X_1$ 为凸开集），F 在 D 内有 $n+1$ 阶 Frechet 导数，且 $F^{(n+1)}(x)$ 在 D 上连续，则对 $x_0 \in D$，$h \in X_1$，$x_0 + h \in D$，有

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + F'(x_0)h + \frac{1}{2!}F''(x_0)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(x_0)h^n$$
$$+ \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n F^{(n+1)}(x_0 + th)h^{n+1}\,\mathrm{d}t \tag{7.3-17}$$

证 作抽象函数 $v: \mathbf{R}^1 \to X_2$，

$$v(t) = F(x_0 + th) + (1-t)F'(x_0 + th)h + \cdots + \frac{1}{n!}(1-t)^n F^{(n)}(x_0 + th)h^n \tag{7.3-18}$$

由于 D 为凸开集，故 $v(t)$ 在某包含[0, 1]的开区间$(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$内有定义且具有连续的一阶导数，且有

$$v'(t) = F'(x_0 + th)h - F'(x_0 + th)h + (1-t)F''(x_0 + th)h^2 + \cdots$$
$$- \frac{1}{(n-1)!}(1-t)^{n-1}F^{(n)}(x_0 + th)h^n + \frac{1}{n!}(1-t)^n F^{(n+1)}(x_0 + th)h^{n+1}$$
$$= \frac{1}{n!}(1-t)^n F^{(n+1)}(x_0 + th)h^{n+1} \tag{7.3-19}$$

由抽象函数的 N-L 公式，有

$$v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)\,\mathrm{d}t \tag{7.3-20}$$

结合(7.3-18)、(7.3-19)、(7.3-20)式便得(7.3-17)式. □

定理 7.3.4 设 X_1，X_2 是实 Banach 空间，$F: D \subset X_1 \to X_2$（D 为凸开集），且 $F^{(n)}(x)$ 在 D 上连续，则当 $x_0 \in D$，$h \in X_1$，$x_0 + h \in D$ 时，有

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + \frac{1}{2!}F''(x_0)h^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(x_0)h^n+\omega(x_0,h^n)\quad(7.3-21)$$

其中 $\|\omega(x,h^n)\|=o(\|h\|^n)$.

证略. □

7.4 隐函数定理

隐函数定理是多元函数微分学的最重要的定理之一，在经典分析中的应用十分广泛. 本节的目的在于把隐函数定理推广到 Banach 空间，作为推论，得到了反函数存在定理，最后给出了两个应用实例.

7.4.1 隐函数存在定理

设 X, Y, Z 都是实的 Banach 空间，$D\subset X\times Y$ 为开集，F: $D\to Z$. 考虑算子方程

$$F(x,y)=0\qquad(7.4-1)$$

在点 $(x_0,y_0)\in D$ ($F(x_0,y_0)=0$) 附近，当 F 具有什么条件时，方程(7.4-1)关于 y 可解？如果关于 y 可解，其解算子 $y=f(x)$ 的性质如何？这就是隐函数定理要解决的问题.

在给出隐函数存在定理之前，先引入多变元算子偏导数的概念.

定义 7.4.1(偏导算子) 设 X, Y 和 Z 都是实 Banach 空间，$D\subset X\times Y$ 是开集，F: $D\to Z$, $(x_0,y_0)\in D$. 如果 $F(x,y_0)$ 在 x_0 点关于 x 的 Frechet 导算子存在，则称它为 F 在 (x_0,y_0) 点关于 x 的偏导算子，记为 $F'_x(x_0,y_0)$. 对于另一变量的偏导算子可以同样定义.

注 7.4.1 算子 F: $D\to Z$ 的关于 x 的偏导算子可以等价地定义为：如果存在 $T\in B(X\to Z)$，满足

$$F(x_0+h,y_0)-F(x_0,y_0)=Th+\omega(x_0,y_0,h)\qquad(7.4-2)$$

其中 $\|\omega(x_0,y_0,h)\|=o(\|h\|)$，则 T 是 F 关于 x 的偏导数，$F'_x(x_0,y_0)=T$. 因此可知 $F'_x(x_0,y_0)\in B(X\to Z)$, $F'_y(x_0,y_0)\in B(Y\to Z)$，偏导映射

$$F_x(\cdot,\cdot): D\to B(X\to Z),\ F_y(\cdot,\cdot): D\to B(Y\to Z)$$

例 7.4.1 设 $X=\mathbf{R}^n$, $Y=\mathbf{R}^m$, $Z=\mathbf{R}^m$, F: $X\times Y\to Z$. 定义为

$$\boldsymbol{z}=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in\mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_m)\in\mathbf{R}^m$

则

$$F'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}&\frac{\partial F_1}{\partial y_2}&\cdots&\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \cdots&\cdots&&\cdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}&\frac{\partial F_m}{\partial y_2}&\cdots&\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{bmatrix}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

定理 7.4.1(隐函数存在定理) 设 F 满足：

① $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) ($(x_0,y_0)\in D$) 某一邻域内连续，且 $F(x_0,y_0)=0$；

② $F'_y(x,y)$ 在上述邻域内存在，且 $F'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续；

③ $F'_y(x_0, y_0): Y \to Z$ 具有有界逆，

则存在 $r>0$，$\tau>0$，使当 $\| x-x_0 \| < r$ 时，有

(1) 方程(7.4-1)在 $\| y-y_0 \| < \tau$ 内具有唯一解 $y=f(x)$；

(2) $y_0=f(x_0)$；

(3) $y=f(x)$ 在球域 $B(x_0, r)=\{x\in X \mid \| x-x_0 \| < r\}$ 内连续.

证 (1) 由条件③，可取 $M=\| [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} \| > 0$，再由条件②，存在 $\delta>0$，$\tau>0$，使当 $\| x-x_0 \| \leqslant \delta$，$\| y-y_0 \| \leqslant \tau$ 时，有

$$\| F'_y(x, y) - F'_y(x_0, y_0) \| < \frac{1}{2M} \tag{7.4-3}$$

由于 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某一邻域连续，不妨设 $F(x, y)$ 在 $\bar{O}(x_0, y_0)=\{(x, y)\in D \mid \| x-x_0 \| \leqslant \delta, \| y-y_0 \| \leqslant \tau\}$ 上连续，从而 $F(x, y_0)$ 在 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 上连续. 对上面的 τ，存在 $r>0(0<r\leqslant\delta)$，使当 $\| x-x_0 \| < r$ 时，有

$$\| F(x, y_0) \| = \| F(x, y_0) - F(x_0, y_0) \| < \frac{\tau}{2M} \tag{7.4-4}$$

取 x 满足 $\| x-x_0 \| < r$，并把 x 固定，作映射 $\Phi(x, \cdot): Y \to Y$ 如下：

$$\Phi(x, y) = y-[F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F(x, y) \tag{7.4-5}$$

从而方程(7.4-1)有解$\Longleftrightarrow$算子 $\Phi(x, \cdot)$ 在 Y 中有不动点，下证 $\Phi(x, \cdot)$ 在 $\| y-y_0 \| \leqslant \tau$ 中有不动点. 为此，取闭球 $\bar{B}(y_0, \tau)=\{y\in Y \mid \| y-y_0 \| \leqslant \tau\}$，证明 $\Phi(x, \cdot)$ 是映 $\bar{B}(y_0, \tau)$ 到自身的压缩映射. 实际上，当 $\| y-y_0 \| \leqslant \tau$ 时，有

$$\begin{aligned}\| \Phi'_y(x, y) \| &= \| I-[F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F'_y(x, y) \| \\ &\leqslant \| [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} \| \, \| F'_y(x_0, y_0) - F'_y(x, y) \| \\ &\leqslant M\cdot \frac{1}{2M} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

于是当 $\| y_1-y_0 \| \leqslant \tau$，$\| y_2-y_0 \| \leqslant \tau$ 时，有

$$\begin{aligned}\| \Phi(x, y_2) - \Phi(x, y_1) \| &\leqslant \| \Phi'_y(x, y_1+\theta(y_2-y_1))(y_2-y_1) \| \\ &\leqslant \| \Phi'_y(x, y_1+\theta(y_2-y_1)) \| \, \| y_2-y_1 \| \\ &\leqslant \frac{1}{2} \| y_2-y_1 \|\end{aligned} \tag{7.4-6}$$

即 $\Phi(x, \cdot)$ 是压缩映射. 再证 $\Phi(x, \cdot): \bar{B}(y_0, \tau) \to \bar{B}(y_0, \tau)$. 当 $\| y-y_0 \| \leqslant \tau$ 时，有

$$\begin{aligned}\| \Phi(x, y) - y_0 \| &\leqslant \| \Phi(x, y) - \Phi(x, y_0) \| + \| \Phi(x, y_0) - y_0 \| \\ &= \| \Phi(x, y) - \Phi(x, y_0) \| + \| [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F(x, y_0) \| \\ &< \frac{1}{2} \| y-y_0 \| + M\frac{\tau}{2M} \leqslant \tau\end{aligned}$$

这里的倒数第二个不等式用到了不等式(7.4-4)、(7.4-6). 根据压缩映射原理，算子 $\Phi(x, \cdot)$ 在 $\bar{B}(y_0, \tau)$ 中具有唯一的不动点 y. 由于 y 与 x 有关，记为 $y=f(x)$，故 $F(x, f(x))=0$.

(2) 在结论(1)中取 $x=x_0$，有 $y_0=f(x_0)$.

(3) 证 $y=f(x)$ 在 $\| x-x_0 \| < r$ 中连续. 设 $\| x_1-x_0 \| < r$，$\| x_2-x_0 \| < r$，令 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$，由 $\Phi(x, y)$ 定义及(7.4-6)式，有

$$\begin{aligned}\|f(x_2)-f(x_1)\| &= \|y_2-y_1\| = \|\Phi(x_2, y_2)-\Phi(x_1, y_1)\| \\ &\leqslant \|\Phi(x_2, y_2)-\Phi(x_2, y_1)\| + \|\Phi(x_2, y_1)-\Phi(x_1, y_1)\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|y_2-y_1\| + \|[F_y'(x_0, y_0)]^{-1}[F(x_2, y_1)-F(x_1, y_1)]\|\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\|y_2-y_1\| &\leqslant 2\|[F_y'(x_0, y_0)]^{-1}[F(x_2, y_1)-F_1(x_1, y_1)]\| \\ &\leqslant 2M\|F(x_2, y_1)-F(x_1, y_1)\|\end{aligned}$$

由于 F 关于 x 连续，故当 $x_2\to x_1$ 时，有 $y_2\to y_1$，即 $f(x_2)\to f(x_1)$，$f(x)$的连续性得证. □

隐函数存在定理的特殊情况是反函数定理.

定理 7.4.2 设 X，Y是实 Banach 空间，$D\subset X$是开集，$x_0\in D$，且 f满足：

(1) $f(x_0)=y_0$；

(2) $f'(x)$在 x_0 的某一邻域内连续，且 $f'(x_0)$：$X\to Y$具有有界逆，

则存在 $r>0$，$\tau>0$，使当 $\|y-y_0\|<\tau$时，$f(x)=y$在 $\|x-x_0\|<r$内存在唯一连续解 $x=g(y)$，满足 $x_0=g(y_0)$.

证 在定理 7.4.1 中取 $Z=Y$，$F(x, y)=f(x)-y$便得结论. □

7.4.2 隐函数的可微性定理

定理 7.4.3(隐函数的可微性) 在定理 7.4.1 条件(1)，(2)，(3)之下，再设 $F(x, y)$满足 $F_x'(x, y)$，$F_y'(x, y)$在(x_0, y_0)的上述邻域内存在且连续，则存在 $r>0$，$\tau>0$，使得定理 7.4.1 所确定的唯一解 $y=f(x)$在 $\|x-x_0\|<r$内具有连续的 Frechet 导算子，且有

$$f'(x)=-[F_y'(x, f(x))]^{-1}F_x'(x, f(x)) \tag{7.4-7}$$

证 由定理 7.4.1 知存在连续映射 f：$B(x_0, r)(\subset X)\to B(y_0, \tau)\subset Y$，满足

$$F(x, f(x))=0 \tag{7.4-8}$$

对 $x\in B(x_0, r)$，取 $x+h\in B(x_0, r)$，则 $f(x+h)\in B(y_0, \tau)$，于是

$$F(x+h, f(x+h))=0 \tag{7.4-9}$$

由(7.4-8)、(7.4-9)式及 $F(x, y)$在$(x, f(x))$连续可微，再注意到 f, F_x, F_y 的连续性，有

$$\begin{aligned}0 &= F(x+h, f(x+h))-F(x, f(x)) \\ &= F(x+h, f(x+h))-F(x, f(x+h)) \\ &\quad + F(x, f(x+h))-F(x, f(x)) \\ &= F_x'(x, f(x))h+F_y'(x, f(x))(f(x+h)-f(x)) \\ &\quad + \omega((x, f(x)), (h, f(x+h)-f(x)))\end{aligned}$$

其中 $\omega((x, f(x)), (h, f(x+h)-f(x)))=o([\|h\|^2+\|f(x+h)-f(x)\|^2]^{\frac{1}{2}})$. 由于 $F_y'(x, f(x))$具有有界逆，则存在 $M>0$，使得

$$\begin{aligned}&\|[F_y'(x, f(x))]^{-1}F_x'(x, f(x))h-(f(x+h)-f(x))\| \\ &\leqslant M\|\omega((x, f(x)), (h, f(x+h)-f(x)))\|\end{aligned} \tag{7.4-10}$$

令 $\|h\|\to 0$，有 $\|f(x+h)-f(x)\|\to 0$，则(7.4-10)式右边趋于零，即有

$$f'(x)=-[F_y'(x, f(x))]^{-1}F_x'(x, f(x))$$ □

7.4.3 举例

例 7.4.2 微分方程解对初值的依赖性.

考虑微分方程的 Cauchy 问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases} \tag{7.4-11}$$

其中 x 和 $f(t,x)$ 是某 Banach 空间 E 的元素，x：$J=[t_0,t_1]\to E$ 的抽象函数（$t_1>t_0$，t_1 为任何实数），问题(7.4－11)等价于如下的积分方程：

$$x(t)-x_0-\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))\,\mathrm{d}\tau=0 \tag{7.4-12}$$

将方程(7.4－12)写成算子方程

$$F(x_0,x(t))=0 \tag{7.4-13}$$

这样一来，F 是映 $E\times C_E^1[t_0,t_1]\to C_E^1[t_0,t_1]$ 的非线性算子. 其中 $C_E^1[t_0,t_1]$ 为定义在 $[t_0,t_1]$ 上并在 E 中取值的连续可微的抽象函数的全体. 如果函数 $f(t,x)$ 连续且对 (t,x) 有连续偏导数，则表示式

$$x(t)-\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

定义了一个将 $C_E^1[t_0,t_1]\to C_E^1[t_0,t_1]$ 的可微映射，从而 $F(x_0,x(t))$ 也是对 $x(t)$ 可微的算子，它对 x 的微分为

$$F'_x(x_0,x)h(t)=h(t)-\int_{t_0}^{t}f'_x(\tau,x(\tau))h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{7.4-14}$$

$F'_x(x_0,x)$ 是 $C_E^1[t_0,t_1]\to C_E^1[t_0,t_1]$ 的算子，F'_x 是可逆算子. 事实上，对任何 $y(t)\in C_E^1[t_0,t_1]$，方程

$$F'_x h(t)=y(t)$$

或

$$h(t)-\int_{t_0}^{t}f'_x(\tau,x(\tau))h(\tau)\,\mathrm{d}\tau=y(t)$$

与具有初始条件 $h(t_0)=y(t_0)$ 的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}-f'_x(t,x(t))h(t)=y'(t) \tag{7.4-15}$$

等价，而方程(7.4－15)是具有连续解的线性方程，则这个方程在 $[t_0,t_1]$ 上有唯一满足初始条件的解 $h=h(t)$. 这就证明了 F'_x 的可逆性.

对算子方程(7.4－13)应用隐函数定理，方程(7.4－13)具有唯一解 $x=x(t)$，而这个解与初始值 x_0 有关，记为 $x(t,x_0)$，它以连续可微的形式依赖于 x_0.

特别地，若取 $E=\mathbf{R}^n$，则可以得到“微分方程组的解连续可微地依赖于初始条件”的结论.

例 7.4.3 考虑非线性积分方程

$$x(s)=\lambda\int_0^1 K(s,t,x(t))\,\mathrm{d}t \tag{7.4-16}$$

其中 $K(s,t,u)$，$K_x'(s,t,u)$都在$0\leqslant s,t\leqslant 1$，$u\in[-a,a]$上连续．$a$为某一正数，$\lambda$为参数，$K(s,t,0)\equiv 0$．证明：若 $\lambda_0\neq 0$ 不是线性积分方程

$$x(s)=\lambda\int_0^1 K_x'(s,t,0)x(t)\,\mathrm{d}t \tag{7.4-17}$$

的特征值（即 $x(s)=\lambda\int_0^1 K_x'(s,t,0)x(t)\,\mathrm{d}t$没有非零解），则存在 $r>0$，$\tau>0$（$\tau<r$），使当$|\lambda-\lambda_0|<r$时，方程(7.4-16)在 $C[0,1]$中没有满足 $\|x(s)\|<\tau$的非零解．

证 考虑积分算子

$$Kx(s)=\int_0^1 K(s,t,x(t))\,\mathrm{d}t \tag{7.4-18}$$

容易证明算子 $K:\bar{B}(0,a)=\{x\in C[0,1]\mid\|x\|\leqslant a\}\to C[0,1]$是连续算子．下证：$\forall x_0\in B(0,a)$，$h\in C[0,1]$，$x_0+h\in B(0,a)$时，有

$$K'(x_0)h(s)=\int_0^1 K_x'(s,t,x_0(t))h(t)\,\mathrm{d}t \tag{7.4-19}$$

事实上，令

$$Th(s)=\int_0^1 K_x'(s,t,x_0(t))h(t)\,\mathrm{d}t$$

则
$$\begin{aligned}&\|K(x_0+h)-K(x_0)-Th\|\\&=\left\|\int_0^1[K(s,t,x_0(t)+h(t))-K(s,t,x_0(t))]\,\mathrm{d}t-\int_0^1 K_x'(s,t,x_0(t))h(t)\,\mathrm{d}t\right\|\\&=\left\|\int_0^1[K_x'(s,t,x_0(t)+\theta h(t))-K_x'(s,t,x_0(t))]h(t)\,\mathrm{d}t\right\|\\&\leqslant\|h\|\int_0^1|K_x'(s,t,x_0(t)+\theta h(t))-K_x'(s,t,x_0(t))|\,\mathrm{d}t\qquad 0<\theta<1\end{aligned} \tag{7.4-20}$$

由 $K_x'(s,t,x)$在$[0,1]\times[0,1]\times[-a,a]$上一致连续，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$\|h\|<\delta$时，有

$$|K_x'(s,t,x_0(t)+\theta h(t))-K_x'(s,t,x_0(t))|<\varepsilon$$

故由(7.4-20)式，有

$$\|K(x_0+h)-K(x_0)-Th\|<\varepsilon\|h\|$$

从而
$$K'(x_0)h=Th=\int_0^1 K_x'(s,t,x_0(t))h(t)\,\mathrm{d}t$$

再由 $K_x'(s,t,x)$的一致连续性，则对任何 $x\in B(0,a)$，当$\|x-x_0\|\to 0$时，有$\|K'(x)-K'(x_0)\|\to 0$，故 $K'(x)$在 $B(0,a)$连续．令

$$F(\lambda,x)=x-\lambda Kx$$

显然方程(7.4-16)有解$\Longleftrightarrow F(\lambda,x)=0$对 x有解．

$$F_x'(\lambda,x)=I-\lambda K'(x)$$

由前面讨论知 $F_x'(\lambda,x)$连续．又 λ_0 不是(7.4-17)的特征值，即$[I-\lambda_0K'(0)]h=0$没有非零解，故 $F_x'(\lambda_0,0)=I-\lambda_0K'(0)$有有界逆．由隐函数定理知，存在 $r>0$，$\tau>0$，当$|\lambda-\lambda_0|<r$时，方程 $F(\lambda,x)=0$ 在$\|x\|<\tau$内有唯一解 $x=x(\lambda)$，但 $x\equiv 0$ 为方程(7.4-16)的解，故 $x=x(\lambda)\equiv 0$．

7.5 泛函极值问题

在微积分中，应用导数研究函数的极值问题取得了巨大的成功. 这一节，我们用 Gateaux 导数与 Frechet 导数去求 Banach 空间中泛函的极值. 与微积分中的情况类似，我们要讨论泛函取得局部极值的必要条件、充分条件以及条件极值问题.

7.5.1 泛函极值的必要条件

定义 7.5.1(极值) 设 X 是实 Banach 空间，$D\subset X$，f 是 D 上的实值泛函，$x_0\in D$，若存在 x_0 的某一邻域 $O(x_0)\subset D$，使得对任何 $x\in O(x_0)$，都有

$$f(x_0)\leqslant f(x) \tag{7.5-1}$$

则称 x_0 为 f 的**局部极小点**，$f(x_0)$ 称为 f 的**局部极小值**，简称**极小值**. 类似地，可以定义 f 的局部极大值. 极大值、极小值统称**极值**.

如果(7.5-1)式中的等号去掉，则相应地称为**严格极值**.

定理 7.5.1 如果 f 在 x_0 点取得极值，并且在 x_0 点 f 具有一阶变分 $\delta f(x_0, h)$，则 $\delta f(x_0, h)=0$.

证 对于任何 $h\in X$，考虑函数 $\varphi(t)=f(x_0+th)$，因 f 在 x_0 处取得极值，即 $\varphi(t)$ 在 $t_0=0$ 点处取得极值，故有

$$\delta f(x_0, h)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=\varphi'(0)=0$$

□

推论 7.5.1(必要条件) 如果 f 在 x_0 点取得极值，且 f 在 x_0 点可微(在 Gateaux 或 Frechet 意义下)，则有

$$f'(x_0)=0 \tag{7.5-2}$$

称满足 $f'(x)=0$ 的点为 f 的驻点(或临界点). □

例 7.5.1 设 $X=C[0, 1]$，

$$f(x)=\int_0^1 g(x(t), t)\,\mathrm{d}t \tag{7.5-3}$$

其中 $g(x, t)$ 是连续可微函数. 根据例 7.2.4 可知

$$\delta f(x, h)=\int_0^1 g_x'(x(t), t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

再根据定理 7.5.1，若 f 在 $x(t)\in C[0, 1]$ 取得极值，则对任何 $h(t)\in C[0, 1]$ 有 $\delta f(x, h)=0$，这就表明 $g_x'(x(t), t)=0$. 事实上，对每一 $x(t)\in C[0, 1]$，$g_x'(x(t), t)$ 是 t 的连续函数. 如果存在 $t_0\in[0, 1]$(不妨设 $t_0\in(0, 1)$)，g_x' 在 t_0 点不等于零，比如 $g_x'(x(t_0), t_0)>0$，则这个不等式在 t_0 的某一邻域 $(\alpha, \beta)\subset(0, 1)$ 内也成立，令

$$h(t)=\begin{cases}(t-\alpha)(\beta-t) & t\in[\alpha, \beta]\\ 0 & t\in[\alpha, \beta]\end{cases}$$

就有

$$\int_0^1 g_x'(x(t), t)h(t)\,\mathrm{d}t>0$$

这与 $\delta J(x, h)=0$ 相矛盾，因此，$g'_x(x(t), t)=0$. 一般说来，方程 $g'_x(x, t)=0$ 可以确定某一曲线（$x=x(t)$），在这条曲线上，泛函(7.5－3)式可能取得极值.

例 7.5.2 设 $X=C^1[a, b]$，泛函 $J: X\to \mathbf{R}^1$ 定义为

$$J(x)=\int_a^b g(x(t), x'(t), t)\,\mathrm{d}t \tag{7.5-4}$$

这里 $g(x, u, t)$ 具有二阶连续偏导数，根据例 7.2.5，对在 a，b 点取零值的 $h(t)\in C^1[a, b]$，有

$$\delta J(x, h)=\int_a^b\left(g'_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g'_{x'}\right)h(t)\,\mathrm{d}t$$

再由定理 7.5.1，若 J 在 x 点取得极值，则有

$$\delta J(x, h)=\int_a^b\left(g'_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g'_{x'}\right)h(t)\,\mathrm{d}t=0 \qquad \forall\, h(t)\in C^1[a, b] \tag{7.5-5}$$

与例 7.5.1 讨论相同，可得

$$g'_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g'_{x'}=0 \tag{7.5-6}$$

这就是所求极值点 $x(t)$ 满足的方程，称之为欧拉—拉格朗日(Euler－Lagrange)方程.

利用复合函数求导法，方程(7.5－6)可以改写为

$$g'_x-g''_{x'x}x'-g''_{x'x'}x''-g''_{x't}=0 \tag{7.5-7}$$

有一种特殊情况，如果 g 中不显含 t：$g=g(x, x')$，这时方程(7.5－7)变为

$$g'_x-g''_{x'x}x'-g''_{x'x'}x''=0 \tag{7.5-8}$$

再由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g-g'_{x'}x')=(g'_x-g''_{x'x}x'-g''_{x'x'}x'')x'$$

则(7.5－8)式简写成

$$g-x'g'_{x'}=K \tag{7.5-9}$$

这里 K 为常数.

例 7.5.3(捷线问题) 在铅直平面中不同高度上给出两点 A 和 B，A 高于 B. 设一质点在初速度为零且仅受重力作用的情况下，沿光滑曲线由点 A 无摩擦地滑行到 B 点，问光滑曲线具有什么样的形状，使得滑行的时间最短. 这个问题在历史上被称为捷线问题.

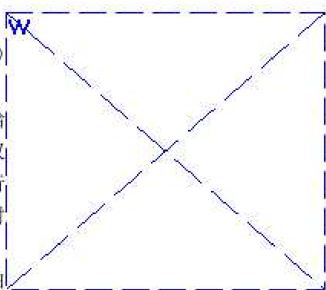


图 7－1

为方便描述，建立坐标系如图 7－1 所示. 设所求曲线为 l，其方程为

$$y=y(x)$$
$$y(0)=0,\ y(x_1)=y_1$$

则质点运动的速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

其中 s 表示弧长. 于是 $\mathrm{d}t=\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x/v$，质点从 A 沿 l 运动到 B 所用的时间为

$$J(y)=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}{v}$$

再设质点的质量为 m，则根据能量守恒定理，可得

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy$$

由此求得 $v=\sqrt{2gy}$．于是有

$$J(y)=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,\mathrm{d}x \tag{7.5-10}$$

在(7.5－10)式中，$g(y, y', x)$不显含 x．根据方程(7.5－9)，$y(x)$应满足方程

$$\frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}=K$$

即
$$y(1+y'^2)=K_1$$

引入参数 φ，使得 $y'=\cot\varphi$，则

$$y=\frac{K_1}{1+y'^2}=\frac{K_1}{1+\cot^2\varphi}=K_1\sin^2\varphi=\frac{K_1}{2}(1-\cos2\varphi)$$

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=\frac{2K_1\sin\varphi\cos\varphi}{\cot\varphi}\mathrm{d}\varphi=2K_1\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=K_1(1-\cos2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

积分可得

$$x=K_1\left(\varphi-\frac{\sin2\varphi}{2}\right)=K_2+\frac{K_1}{2}(2\varphi-\sin2\varphi)+K_2$$

由 $y(0)=0$ 知 $K_2=0$．再令 $\theta=2\varphi$，$R=\dfrac{K_1}{2}$，便得

$$\begin{cases}x=R(\theta-\sin\theta)\\y=R(1-\cos\theta)\end{cases} \tag{7.5-11}$$

(7.5－11)正是以半径为 R 的圆沿 x 轴滚动时的摆线方程，R 由另一边界条件 $y(x_1)=y_1$ 所确定．

7.5.2 泛函极值的充分条件

在微积分中，关于多元函数的极值问题，需要考虑函数的二阶微分，并有以下的结论：

(1) 如果函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在 $x_0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$点取得极小值(或极大值)，则 f 在 x^0 点的二阶微分 $\mathrm{d}^2f\geqslant0$(或$\leqslant0$)．

(2) 如果函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在 $x_0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$点满足条件

$$\mathrm{d}f=0 \quad 或 \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}=0 \qquad i=1, 2, \cdots, n$$

且

$$\mathrm{d}^2f=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j>0 \quad 或 \quad f''(x_0)\ 正定$$

($\mathrm{d}x=(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n)\neq0$)，则 f 在 x_0 点取得极小值(当 $f''(x_0)$负定时，f 在 x_0 点取得极大值)．

这就是说，多元函数二阶微分的非负性是极小值的必要条件，而其正定性是极小值的

充分条件．下面，我们希望把上述结论推广到抽象空间中去．关于结果(1)，我们有以下的定理．

定理 7.5.2 设 X 是实 Banach 空间，$f: X\to \mathbf{R}^1$，且 f 在 $x_0\in X$ 点的某一邻域内具有连续二阶强微分．如果 f 在 x_0 点取得极小值，则

$$d^2 f(x_0) = f''(x_0)h^2 \geqslant 0 \tag{7.5-12}$$

证 根据定理 7.3.4，对任何 $x_0\in D$，$h\in X$，$x_0+h\in D$，有

$$f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(\|h\|^2)$$

如果在 x_0 点泛函 f 有极小值，则 $f'(x_0)=0$，从而有

$$f(x_0+h)-f(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(\|h\|^2) \tag{7.5-13}$$

如果存在 $h\in X$，满足

$$f''(x_0)h^2<0 \tag{7.5-14}$$

那么，由 $f''(x_0)(\varepsilon h)^2=\varepsilon^2 f''(x_0)h^2(\forall \varepsilon>0)$，故存在范数可以任意小的 h 满足(7.5-14)式．对于充分小的 $\|h\|$，则(7.5-13)式右边的符号取决于 $\frac{1}{2}f''(x_0)h^2$，因而得到

$$f(x_0+h)-f(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(\|h\|^2)<0$$

即 f 在 x_0 点不取极小值． □

关于结果(2)，却不能简单地“平移”到抽象空间，可看下例．

例 7.5.4 考虑 Hilbert 空间 l^2 上的泛函

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^2}{n^3}-\sum_{n=1}^{\infty}x_n^4$$

$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in l^2$．容易得到，对 $h=(h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots)\in l^2$，

$$d f(0, h) = f'(0)h = 0$$

$$d^2 f(0, h) = f''(0)h^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n^2}{n^3}>0 \qquad 当\ h\neq 0\ 时$$

而 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 点不取极小值．事实上，$f(0)=0$，对 $h=\left(0, \cdots, 0, \frac{1}{n}, 0, \cdots\right)\in l^2$，有 $f(h)=f\left(0, \cdots, 0, \frac{1}{n}, 0, \cdots\right)=\frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^4}<0$(当 $n>1$ 时)，从而在 $x_0=0$ 点的任何邻域，都存在 $f(x)<f(0)$ 的点 x，即 $f(0)$ 不是极小值．

这个例子说明：对于实 Banach 空间上的泛函，$f''(x_0)$ 正定未必保证 f 在 x_0 点取得极小值，为此，我们引入下面的定义．

定义 7.5.2(强正定) 如果存在常数 $C>0$，使得对任何 $h\in X$，都有

$$f''(x_0)h^2\geqslant C\|h\|^2 \tag{7.5-15}$$

称 $f''(x_0)$ 是**强正定的**，或称二次泛函 $f''(x_0)h^2$ 是**强正定的**．

定理 7.5.3(充分条件) 设 X 是实 Banach 空间，$f: X\to\mathbf{R}^1$，满足：

(1) $d f(x_0, h)=f'(x_0)h=0$；

(2) $d^2 f(x_0, h)=f''(x_0)h^2$ 是强正定的，

则 f 在 x_0 点取得极小值.

证 由条件(1)，有

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(\|h\|^2)$$

再由条件(2)，则存在 $C>0$，使 $f''(x_0)h^2\geqslant C\|h\|^2$. 选 $\varepsilon>0$ 充分小，使当 $\|h\|<\varepsilon$时，有 $|o(\|h\|^2)|<\frac{1}{4}C\|h\|^2$. 于是

$$f(x_0+h)-f(x_0)>\frac{1}{2}C\|h\|^2-\frac{1}{4}C\|h\|^2=\frac{1}{4}C\|h\|^2>0$$

即 $f(x_0)$是极小值. □

注 7.5.1 在有限维空间中，二次泛函 $f''(x_0)h^2$ 正定与强正定是等价的，因此，在一阶微分等于零，二阶微分正定的条件下，可保证函数有极小值. 在无穷维的情形，强正定较正定是更强的条件. 在二阶微分强正定的条件之下，可保证泛函取得极小值.

7.5.3 条件极值问题

上面说到的极值按习惯称为无条件极值，当有约束条件时，称为条件极值. 在实际问题中，有各种约束条件，最常见的有等式约束条件和不等式约束条件. 这里我们仅讨论等式约束的极值问题.

设 X，Y都是实 Banach 空间，f：$X\to\mathbf{R}^1$，H：$X\to Y$. 考虑 f在条件

$$H(x)=0 \tag{7.5-16}$$

之下的极值问题.

定义 7.5.3(正则点) 设 F：$D(D\subset X$为开集$)\to Y$的映射，F在 D上 Frechet 可微，如果 $x_0\in D$，使得 $F'(x_0)$是从 X到 Y上的映射(满射)，则称 x_0 是 F的一个正则点.

例 7.5.5 设 F：$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$，如果 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$，使 $F'(\boldsymbol{x}_0)=\left(\frac{\partial F_i(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,2,\cdots,m\\ j=1,2,\cdots,n}}$的秩等于 m，则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 F的一个正则点.

引理 7.5.1 设 f在满足约束 $H(x)=0$ 的条件下，在 $x_0\in X$点取得局部极值，且 f和 H在包含 x_0 的某一开集 $O(x_0)$中 Frechet 可微，x_0 是 H的正则点，则对于任何满足 $H'(x_0)h=0$ 的 $h\in X$，都有 $f'(x_0)h=0$.

证 为确定起见，不妨设 x_0 是局部极小值点. 考虑算子 F：$X\to\mathbf{R}^1\times Y$，其定义为 $F(x)=(f(x),H(x))$. 如果存在 $h\in X$，使得 $H'(x_0)h=0$，而 $f'(x_0)h\neq0$，则 $F'(x_0)=(f'(x_0),H'(x_0))$：$X\to\mathbf{R}^1\times Y$映上的(满射)(因 $H'(x_0)$：$X\to Y$是映上的). 根据反函数定理(定理 7.4.2)，当正数 ε充分小($\varepsilon<\sigma$)时，对位于点$(f(x_0),0)=(f(x_0),H(x_0))$的 τ邻域的点$(f(x_0)-\varepsilon,0)$，方程 $F(x)=(f(x_0)-\varepsilon,0)$有唯一解 x，满足 $\|x-x_0\|<\tau$. 这与 x_0 是条件极小值点相矛盾. □

定理 7.5.4(Lagrange 乘数法) 设 X，Y都是实 Banach 空间，并设：

(1) 泛函 f：$X\to\mathbf{R}^1$ 在 X上 Frechet 可微；

(2) 映射 H：$X\to Y$，H是 Frechet 可微的，x_0 满足 $H(x)=0$，且 x_0 是 H的正则点；

(3) $f(x)$在 x_0 取得极值，

则存在 $y^* \in Y^*$，使得对任何 $x \in X$，都有

$$f'(x_0)x + y^*(H'(x_0)x) = 0 \tag{7.5-17}$$

或

$$f'(x_0) + y^* H'(x_0) = 0 \tag{7.5-18}$$

证 由引理 7.5.1 容易看出，$f'(x_0)$与 $H'(x_0)$的零空间 $N(H'(x_0))$正交，再由于 $H'(x_0)$的值域是 Y(Y是 Banach 空间)，根据值域定理(定理 4.6.5)有 $R((H'(x_0))^*) = (N(H'(x_0)))^{\perp}$，从而 $f'(x_0) \in R((H'(x_0))^*)$. 因此，存在 $y^* \in Y^*$，使得

$$f'(x_0) = -(H'(x_0))^* y^*$$

即对任何 $x \in X$，有

$$\begin{aligned} f'(x_0)x &= (f'(x_0), x) = -((H'(x_0))^* y^*, x) \\ &= -(y^*, H'(x_0)x) = -y^* H'(x_0)x \end{aligned}$$

即有

$$f'(x) + y^* H'(x_0) = 0$$

□

注 7.5.2 定理7.5.3 说明：如果 $x_0 \in X$是条件极值点，则存在 $y^* \in Y^*$，使得 x_0 是 lagrange 泛函

$$L(x) = f(x) + y^* H(x) \tag{7.5-19}$$

的一个驻点. 这样就把条件极值问题化为无条件极值问题.

对于特殊情况 $Y = \mathbf{R}^n$，条件(7.5-16)式可写成

$$\begin{cases} H_1(x) = 0 \\ H_2(x) = 0 \\ \cdots \\ H_n(x) = 0 \end{cases} \tag{7.5-20}$$

x_0 是映射 $H = (H_1, H_2, \cdots, H_n)$：$X \to \mathbf{R}^n$ 的正则点，可规定为 $H'(x_0) = (H_1'(x_0), H_2'(x_0), \cdots, H_n'(x_0))$是映上的，这等价于 n个线性泛函 $H_1'(x_0)$，$H_2'(x_0)$，$\cdots$，$H_n'(x_0)$是线性无关的. 根据定理 7.5.3 有下面定理.

定理 7.5.5 设 f，H_1，H_2，$\cdots$，H_n 是 $X \to \mathbf{R}^1$ 的泛函，且它们是 Frechet 可微的，如果 x_0 是泛函 f在约束条件(7.5-20)式之下的极值点，且 x_0 是 H的正则点，则存在(λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n)$\in \mathbf{R}^n$，使得

$$f'(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i H_i'(x_0) = 0 \tag{7.5-21}$$

证 在定理 7.5.3 中取 $Y = \mathbf{R}^n$，$Y^* = (\mathbf{R}^n)^* = \mathbf{R}^n$，便得结论. □

例 7.5.6(等周问题) 在连接两定点 A及 B而长度为 l(l大于 A、B两点间的距离)的光滑曲线中，确定一条曲线，使得它和直线 AB一起围成最大的面积.

解 如图 7-2 所示，以过 A、B两点的直线为 x轴，且设 x_1、x_2 分别为 A、B的横坐标. 不妨认为所求曲线在区间[x_1, x_2]上是单值函数 $y = y(x)$，于是问题化为求泛函

$$f(y) = \int_{x_1}^{x_2} y(x) \, \mathrm{d}x$$

在约束条件

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x = l$$

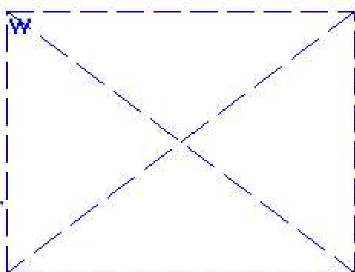


图 7－2

之下的极值.

根据定理 7.5.4，极大值点 $y(x)$ 是泛函

$$L(y) = \int_{x_1}^{x_2} [\,y(x) + \lambda \sqrt{1 + y'^2(x)}\,]\,\mathrm{d}x - \lambda l$$

的驻点. 代入方程(7.5－9)($L = L(y,\ y')$不显含 x)，有

$$y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = k$$

从而

$$y' = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y - k)^2}}{y - k}$$

或

$$\frac{(y - k)\,\mathrm{d}y}{\sqrt{\lambda^2 - (y - k)^2}} = \mathrm{d}x$$

积分得

$$(x - c)^2 + (y - k)^2 = \lambda^2$$

所以，等周问题的解是一条通过 A，B 两点且长度为 l 的圆弧. 其中参数 k，c，λ 要由边界条件及圆弧的长度 l 来确定.

有关条件极值的更多的例子，可参看文献[14].

习 题 七

1. 设 $X = l^2$，$Y = \mathbf{R}^1$，定义 F：$X \to Y$ 如下：

$$F(x) = \sum_{|x_m| \geq 1}{}' (|x_m| - 1)^m$$

其中，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) \in l^2$，证明 F 在 X 上连续，但 F 无界.

2. 设 $X = C^1[a,\ b]$，$Y = C[a,\ b]$，f：$C^1[a,\ b] \to C[a,\ b]$ 定义为

$$(f(x))(t) = x'(t) + [x(t)]^2$$

验证 f 在 $C^1[a,\ b]$ 上每一点都 Frechet 可微，并求 f 在 $x_0 \in C^1[a,\ b]$ 点 Frechet 导数.(其中 $C^1[a,\ b]$ 中函数的范数为 $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$.)

3. Hammerstein 积分算子

$$(Tx)(t) = \int_a^b K(t,\ s)\,g(s,\ x(s))\,\mathrm{d}s$$

其中积分核 $K(t,\ s)$ 在正方形 $a \leqslant t,\ s \leqslant b$ 上连续，$g(u,\ v)$ 在 $a \leqslant u \leqslant b$，$-\infty < v < +\infty$ 上连续，$g'_v(u,\ v)$ 在这一区域上一致连续. 验证：T：$C[a,\ b] \to C[a,\ b]$，且 T 在 $C[a,\ b]$ 上是 Frechet 可微的，并求 $F'(x_0)$.

4. 设 X 是实自反 Banach 空间，$A \in B(X \to X^*)$ 且 A 是正算子，即$(Ax,\ x) \geqslant 0$，显然

它的共轭算子 $A^{*}\in B(X^{*}\to X^{*})$，定义 φ: $X\to\mathbf{R}^{1}$ 如下：

$$\varphi(x)=(Ax,x)$$

求 $\varphi'(x)$.

5. 用 $M(n\times n)$ 表示 $n\times n$ 实矩阵的全体，把 $M(n\times n)$ 看作 $B(\mathbf{R}^{n}\to\mathbf{R}^{n})$，则 $M(n\times n)$ 是一实的 Banach 空间，记 $GL(n)=\{\mathbf{A}\in M(n\times n)\mid\mathbf{A}$ 可逆$\}$，证 $GL(n)$ 是 $M(n\times n)$ 中的开集；定义映射 F: $GL(n)\to M(n\times n)$ 为

$$F(\mathbf{A})=\mathbf{A}^{-1}$$

证明 F 在 $\mathbf{A}\in GL(n)$ Frechet 可微，且有 $F'(\mathbf{A})\boldsymbol{H}=-\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{H}\mathbf{A}^{-1}$.

6. 证明定理 7.3.4.

7. 求泛函 $J(x)=\int_{0}^{\pi}(x^{2}-2x\cos t)\,\mathrm{d}t$ 满足边界条件 $x(0)=x(\pi)=0$ 的极值曲线.

8. (最小曲面问题). 在 xOy 平面上，连接两点 $A(x_0, y_0)$、$B(x_1, y_1)$ 的所有曲线中，找出这样一条曲线 $y=y(x)$，使它绕 Ox 轴旋转一周所成曲面有最小面积.

附录　部分习题参考解答或提示

习　题　一

7. 不妨设 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$单调增加，其间断点全体记为 E. 对任意 x_1，$x_2\in E(x_1<x_2)$，有

$$f(x_1-0)<f(x_1+0)\leqslant f(x_2-0)<f(x_2+0)$$

记

$$\delta(x_1)=(f(x_1-0),\ f(x_1+0))$$

$$\delta(x_2)=(f(x_2-0),\ f(x_2+0))$$

则 $\delta(x_1)\cap\delta(x_2)=\varnothing$. 分别在 $\delta(x_1)$，$\delta(x_2)$中取定有理数 r_{x_1}，r_{x_2}，则 $r_{x_1}<r_{x_2}$. 对每一 $x_n\in E$，作 $\delta(x_n)$，并选 r_{x_n}，则不同的 x_n 对应不同的有理数 r_{x_n}. 从而 E与有理数集

$$\mathbf{Q}_E=\{r_{x_n}\mid x_n\in E\}$$

构成一一对应，而 $\mathbf{Q}_E$ 是至多可列集，故 E也是至多可列集.

8. 由于 A是可列集，记 E_n是由 A 的 n个元素构成的集合之集，易知 E_n是可数集($n=1$，2，3，…)，则 A的有限子集构成的集合可以写成

$$A^*=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$$

由定理 1.1.3(2)知 A^*是可列集.

10. (3) 将(0，1)中的全体有理数排列为

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots$$

而[0，1]中的全体有理数可排列为

$$0,\ 1,\ r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots$$

作它们之间的对应 φ如下：

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x=r_1\\ 1 & x=r_2\\ r_{n+2} & x=r_n,\ n>2\\ x & x\text{是}(0,1)\text{中的无理数}\end{cases}$$

则 $\varphi(x)$是(0，1)与[0，1]间的一一对应.

14. $A^0\subset A$显然，下证 A^0 是开集. 对 $x_0\in A^0$，由于 x_0 是 A的内点，故存在 $\delta>0$，使 $O(x_0,\delta)\subset A$；对任何 $x_1\in O(x_0,\delta)$，存在 $\delta_1>0$，使 $O(x_1,\delta_1)\subset A$，故 $x_1\in A^0$，使 $O(x_0,\delta)\subset A^0$，即 A^0 是开集.

再设 $A_1\subset A$且 A_1 是开集，则对任何 $x\in A_1$，x是 A_1 的内点，也是 A 的内点，故

$x\in A^0$，即 $A_1\subset A^0$，这就证明了 A^0 是 A 中的最大开集.

$A\subset\overline{A}$，显然，$\overline{A}$ 是闭集. 如果 $A_2\supset A$，A_2 闭，则对任 $x\in A'$，有 $x\in A_2$ 即 $A_2\supset A'$，故 $A_2\supset A\cup A'=\overline{A}$，故 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集.

16. $\partial\mathbf{Q}=[a,b]$.

22. 由 $E\cap(A\cup B)=(E\cap A)\cup(E\cap B)$，$(E\cap A)\cap(E\cap B)=\varnothing$，则有

$$m^*(E\cap(A\cup B))\leqslant m^*(E\cap A)+m^*(E\cap B)$$

$$m_*(E\cap(A\cup B))\geqslant m_*(E\cap A)+m_*(E\cap B)$$

因此只证明

$$m^*(E\cap(A\cup B))\geqslant m^*(E\cap A)+m^*(E\cap B) \qquad (A)$$

$$m_*(E\cap(A\cup B))\leqslant m_*(E\cap A)+m_*(E\cap B) \qquad (B)$$

先证(A)式. 对任何 $\varepsilon>0$，有开集 $G\supset E\cap(A\cup B)$，使

$$mG<m^*(E\cap(A\cup B))+\varepsilon$$

由

$$G\supset G\cap(A\cup B)=(G\cap A)\cup(G\cap B)$$

$$(G\cap A)\cap(G\cap B)=\varnothing$$

$$G\cap A\supset E\cap A$$

$$G\cap B\supset E\cap B$$

有

$$\begin{aligned}m^*(E\cap(A\cup B))+\varepsilon&>mG\\&\geqslant m(G\cap(A\cup B))\\&=m(G\cap A)+m(G\cap B)\\&\geqslant m^*(E\cap A)+m^*(E\cap B)\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0$，便得(A)式. 再证(B)式. 对任何 $\varepsilon>0$，有闭集 $F\subset E\cap(A\cup B)$，使

$$mF>m_*(E\cap(A\cup B))-\varepsilon$$

由

$$F=F\cap(A\cup B)=(F\cap A)\cup(F\cap B)$$

$$(F\cap A)\cap(F\cap B)=\varnothing$$

$$F\cap A\subset E\cap A$$

$$F\cap B\subset E\cap B$$

有

$$\begin{aligned}m_*(E\cap(A\cup B))-\varepsilon&<mF\\&=m(F\cap(A\cup B))\\&=m(F\cap A)+m(E\cap B)\\&\leqslant m_*(E\cap A)+m_*(E\cap B)\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0$ 即得(B)式.

25. 对任何 $\varepsilon>0$，由 $g(x)$几乎处处有限，故存在正数 k，使得

$$mE(|g|>k)<\frac{\varepsilon}{2}$$

又由于 $f_n(x)\overset{m}{\Rightarrow}f(x)$，于是对任何 $\sigma>0$，存在 $N=N(K,\sigma)$，使当 $n>N$时，

$$mE\left(|f_n-f|>\frac{\sigma}{k}\right)<\frac{\varepsilon}{2}$$

易知

$$E(|f_n g - fg| > \sigma) \subset E(|g| > k) \cup E\left(|f_n - f| > \frac{\sigma}{k}\right)$$

故当 $n > N$时，有

$$mE(|f_n g - fg| > \sigma) \leqslant mE(|g| > k) + mE\left(|f_n - f| > \frac{\sigma}{k}\right)$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

亦即 $f_n(x)g(x) \overset{m}{\Rightarrow} f(x)g(x)$.

26. 设$\{f_n(x)\}$是 E上的可测函数列，记

$$f(x) = \sup\{f_n(x)\}$$

对于任意数 a,

$$E(f > a) = E(\sup_n f_n > a) = E(\text{至少有一个 } f_n > a)$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > a)$$

由于 $f_n(n=1, 2, 3, \cdots)$是 E上的可测函数，$E(f_n > a)$是可测集，因而 $E(f > a)$是可测集，所以 $f(x)$是可测函数.

27. 任给 $\sigma > 0$，有

$$\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{E(f_n \geqslant \sigma)} f_n\,\mathrm{d}x + \int_{E(f_n < \sigma)} f_n\,\mathrm{d}x \geqslant \sigma mE(f_n \geqslant \sigma) \geqslant 0$$

由 $\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0(n \to \infty)$，可知 $mE(f_n \geqslant \sigma) \to 0$，即 $f_n(x) \overset{m}{\Rightarrow} 0$.

30. 由函数 $y = \dfrac{x}{1+x}$当 $x > -1$ 时严格单增，可知

$$\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \geqslant \frac{\sigma}{1+\sigma} \Longleftrightarrow |f_n| \geqslant \sigma$$

从而可知

$$E\left(\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \geqslant \frac{\sigma}{1+\sigma}\right) = E(|f_n| \geqslant \sigma)$$

由此可推知

$$\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \overset{m}{\Rightarrow} 0 \quad n \to \infty \Longleftrightarrow f_n \overset{m}{\Rightarrow} 0 \quad n \to \infty$$

若 $\int_E \dfrac{|f_n|}{1+|f_n|}\,\mathrm{d}x \to 0(n \to \infty)$，由题 27 结论，必有$\dfrac{|f_n|}{1+|f_n|} \overset{m}{\Rightarrow} 0$，从而 $f_n(x) \overset{m}{\Rightarrow} 0$.

反之，若 $f_n(x) \overset{m}{\Rightarrow} 0$，则有$\dfrac{|f_n|}{1+|f_n|} \overset{m}{\Rightarrow} 0$. 又

$$0 \leqslant \frac{|f_n|}{1+|f_n|} \leqslant 1 \quad n = 1, 2, \cdots$$

由勒贝格控制收敛定理，有

$$\lim_{n \to \infty} \int_E \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\,\mathrm{d}x = \int_E 0\,\mathrm{d}x = 0$$

习 题 二

1. 不是距离，因为三角不等式不成立(例如，取 $x=1$，$y=-1$，$z=0$，$d(x,y)=(x-y)^2=4$，而 $d(x,z)=(x-z)^2=1$，$d(z,y)=(z-y)^2=1$).

2. 注意到 $|x-y|\leqslant|x-z|+|z-y|\leqslant(|x-z|^{\frac{1}{2}}+|z-y|^{\frac{1}{2}})^2$.

3. 应用定义.

4. 令 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}(t>0)$ 是单调增加函数.

5. $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$ 蕴含

$$d(x,A)=\inf_{z\in A}d(x,z)\leqslant\inf_{z\in A}[d(x,y)+d(y,z)]$$
$$=d(x,y)+\inf_{z\in A}d(y,z)=d(x,y)+d(y,A)$$

从而 $d(x,A)-d(y,A)\leqslant d(x,y)$，交换 x，y，两边同乘以 -1，有

$$-d(x,y)\leqslant d(y,A)-d(x,A)$$

6. (2) 对 d_1，d_2 应用 Minkowski 不等式；

(3) 应用三角不等式.

8. 若 A 是开球 $O_\alpha(\alpha\in I)$ 的并，即 $A=\bigcup\limits_{\alpha\in I}O_\alpha$，则 A 是开集；反过来，若 A 是开集，则 $\forall x\in A$，$\exists\delta_x>0$，使 $O(x,\delta_x)\subset A$，则 $A=\bigcup\limits_{x\in A}O(x,\delta_x)$.

9. 设 $A\subset X$，$\forall x\in A$，开球 $O\left(x,\dfrac{1}{2}\right)=\{x\}\subset A$，因此 A 是开集. 同理可证 A^C 也是开集，故 A 既开又闭.

10. 可验证泛函 $f: X\to[0,+\infty)$，$f(x)=d(x,A)$ 是连续的，由此，$\{x\in X|d(x,A)<\varepsilon\}=f^{-1}([0,\varepsilon))$ 是开集；$\{x\in X|d(x,A)\leqslant\varepsilon\}=f^{-1}([0,\varepsilon])$ 是闭集.

12. 不完备. 考察点列 $\{n\}\subset\mathbf{R}^1$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\dfrac{\pi}{2}$，故 $\{n\}$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的基本列，但 $\{n\}$ 在 $\mathbf{R}^1$ 中不收敛于 $\mathbf{R}^1$ 中的点.

13. 必要性是定理 2.2.6. 只证充分性. 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本列，对 $\varepsilon_k=\dfrac{1}{2^{k+1}}$，存在 n_k，使得 $m\geqslant n_k$ 时，$d(x_{n_k},x_m)<\varepsilon_k$. 不妨设 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，作闭球列：

$$B_k=\left\{x\in X\mid d(x,x_{n_k})\leqslant\frac{1}{2^k}\right\}\qquad k=1,2,3,\cdots$$

于是当 $y\in B_{k+1}$ 时，

$$d(y,x_{n_k})\leqslant d(x_{n_k},x_{n_{k+1}})+d(x_{n_{k+1}},y)<\frac{1}{2^k}$$

因为 $B_{k+1}\subset B_k$，即 $\{B_k\}$ 是一列单调下降的闭球套. 由假设，存在 $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}B_k$，因此，

$$d(x_{n_k},x)\leqslant\frac{1}{2^k}$$

即 $x_{n_k}\to x$，再由 $\{x_n\}$ 是基本列，则 $x_n\to x$，即 X 是完备的距离空间.

14. $f^{-1}(\overline{f(B)})\supset f^{-1}(f(B))\supset B$，又由 f 的连续性，$f^{-1}(\overline{f(B)})$ 闭，可知 $f^{-1}(\overline{f(B)})\supset\bar{B}$，得 $\overline{f(B)}\supset f(\bar{B})$. 又 B 是 A 的稠密子集，故 $\bar{B}\supset A$，所以 $\overline{f(B)}\supset f(\bar{B})\supset f(A)$，即 $\overline{f(B)}$ 在 $f(A)$ 中稠密.

16. 取 $x_0\in X-X_1$，由 X_1 在 X 中稠密，则 $\exists\, x_n\in X_1$，使 $x_n\to x_0$，而 $\{x_n\}$ 是 X 中也是 X_1 中的基本列，但 $\{x_n\}$ 在 X_1 中不收敛，故 X_1 不完备.

$L^1[a,b]\supset R[a,b]$，又 $D(x)\in L^1[a,b]$，$D(x)\in R[a,b]$，所以 $R[a,b]\neq L^1[a,b]$，故 $R[a,b]$ 不完备.

17. 例 2.2.3 已证明 $C[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密，只要证明 $C_{2\pi}$ 按 $L^p[a,b]$ 中的距离在 $C[a,b]$ 中稠密. 设 $x\in C[a,b]$，$\forall\,\varepsilon>0$，取 $M=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$，$\delta=(\varepsilon/(2M))^p$，作 x_1 如下：

$$x_1(t)=\begin{cases} x(t) & 0\leqslant t\leqslant 2\pi-\delta \\ x(0) & t=2\pi \\ \text{线性} & 2\pi-\delta<t<2\pi \end{cases}$$

易见

$$\begin{aligned}\|x-x_1\|_p&=\left(\int_0^{2\pi}|x(t)-x_1(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\\&=\left(\int_{2\pi-\delta}^{2\pi}|x(t)-x_1(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\\&\leqslant[\delta\cdot(2M)^p]^{1/p}=\varepsilon\end{aligned}$$

这就是说，$C_{2\pi}$ 在 $C[0,2\pi]$ 中稠密.

19. $\forall\, x_n\in A_n$，由 $A_n\supset A_{n+1}$，则 $\{x_n\}\subset A_1$，所以 $\{x_n\}$ 有收敛子列. 设 $\{x_{n_j}\}$ 收敛于 x_0，则可证 $x_0\in A_n$，$n=1,2,\cdots$，故 $x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

20. $\Rightarrow$ 显然.

$\Leftarrow$ 若单射 f 把 X 中的任何紧集映为 Y 中的紧集，则可证：$\{x_n\}$ 是由一列互不相同的点组成的点列，$x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，$x_n\neq x_0\ (n=1,2,\cdots)$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$. 由此易知若 $\{x_n\}$ 是一点列，且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，则 $\{f(x_n)\}$ 的任何子列必收敛，而收敛子列的极限为 $f(x_0)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在，且等于 $f(x_0)$，即 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

21. $\forall\{x_n\}\subset M\subset X$，由于 X 是紧的，故 $\{x_n\}$ 有一收敛的子序列 $\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\to x\in X$. 由于 M 闭，故 $x\in M$，即 M 是紧的.

22. 根据下确界定义，必存在 $x_n\in F_1$，$y_n\in F_2$，使

$$d(F_1,F_2)=\inf_{x\in F_1,\,y\in F_2}d(x,y)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$$

由于 F_1，F_2 是 X 的紧集，必有 $\{x_{n_k}\}$，$\{y_{n_k}\}$，使 $x_{n_k}\to x_0\in F_1$，$y_{n_k}\to y_0\in F_2$，再由 $d(x,y)$ 的连续性有 $d(F_1,F_2)=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=\lim\limits_{k\to\infty}d(x_{n_k},y_{n_k})=d(x_0,y_0)$.

习 题 三

3. 因收敛数列必有界，故 $C_0\subset l^\infty$，易验证 C_0 是 l^∞ 的线性子空间. 下证 C_0 是闭的. 设

$$x^{(k)}=(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \cdots,\ x_n^{(k)},\ \cdots)\in C_0$$
$$x^{(0)}=(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \cdots,\ x_n^{(0)},\ \cdots)\in l^\infty$$
且
$$\|x^{(k)}-x^{(0)}\|=\sup_{n\geq 1}|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}|\to 0\qquad k\to\infty$$
于是，对任何 $\varepsilon>0$，存在 K(自然数)，当 $k>K$ 时，有
$$\|x^{(k)}-x^{(0)}\|=\sup_{n\geq 1}|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}|<\frac{1}{2}\varepsilon$$
注意对任何 n，当 $k>K$ 时，
$$|x_n^{(0)}|\leqslant|x_n^{(k)}|+|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}|<|x_n^{(k)}|+\frac{\varepsilon}{2}$$
固定 k，由 $x^{(k)}\in C_0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(k)}=0$，所以有 N，使得 $n>N$ 时，有
$$|x_n^{(k)}|<\frac{\varepsilon}{2}$$
于是当 $n>N$ 时，有 $|x_n^{(0)}|<\varepsilon$，即 $x^{(0)}\in C_0$，由此可知 C_0 为 l^∞ 的闭子空间.

5. (提示：应用题 4 的结论). $\varphi(x_1,\ x_2)=(|x_1|^p+|x_2|^p)^{1/p}(0<p<1)$ 不再是 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2)$ 的范数，因为此时 $\{x|\varphi(x_1,\ x_2)\leqslant 1\}$ 不再是 $\mathbf{R}^2$ 中的凸集. 例如，
$$\varphi(1,\ 0)=\varphi(0,\ 1)=1$$
而连接 $(1,0)$ 与 $(0,1)$ 两点的连线的中点为 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，而
$$\varphi\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1}{2}\right)^p\right]^{1/p}=\left(2\cdot\frac{1}{2^p}\right)^{1/p}=2^{\frac{1}{p}-1}>1$$
因而
$$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\in\{x|\varphi(x_1,\ x_2)\leqslant 1\}$$
即 $\{x|\varphi(x_1,\ x_2)\leqslant 1\}$ 不是凸集.

6. $V[a,\ b]$ 显然为线性空间，易证 $\|\cdot\|$ 满足范数公理，故 $V[a,\ b]$ 是线性赋范空间. 下证 $V[a,\ b]$ 完备. 由范数导出的距离是
$$d(x,\ y)=|x(a)-y(a)|+V_a^b(x-y)$$
设 $\{x_n\}$ 是 $V[a,\ b]$ 中的基本列，则 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当 m，$n>N$ 时，有
$$d(x_m,\ x_n)=|x_m(a)-x_n(a)|+V_a^b(x_m-x_n)<\varepsilon$$
易知 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,\ b]$ 上一致收敛，记极限函数为 $x(t)$. 最后证 $x(t)\in V[a,\ b]$，且 $\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty)$.

证 $x(t)$ 右连续. 设 $\Delta t>0$，
$$|x(t)-x(t+\Delta t)|\leqslant|x(t)-x_n(t)|+|x_n(t)-x_n(t+\Delta t)|$$
$$+|x_n(t+\Delta t)-x(t+\Delta t)|$$
利用 $x_n(t)\rightrightarrows x(t)$ 及 $x_n(t)$ 右连续可知 $x(t)$ 右连续.

再证：$V_a^b(x)<+\infty$，且 $\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty)$.

因 $\{x_n\}$ 是 $V[a,\ b]$ 中的基本列，所以 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当 m，$n>N$ 时，有
$$|x_m(a)-x_n(a)|+\sum_{i=1}^{k}|(x_m(t_i)-x_n(t_i))-(x_m(t_{i-1})-x_n(t_{i-1}))|$$
$$\leqslant\|x_m-x_n\|<\varepsilon$$
对一切分割 Δ 均成立，上不等式中固定 $n>N$，令 $m\to\infty$，得

$$|x(a)-x_n(a)|+\sum_{i=1}^{k}|(x(t_i)-x_n(t_i))-(x(t_{i-1})-x_n(t_{i-1}))|\leqslant \varepsilon$$

故当 $n>N$ 时，有 $\|x-x_n\|\leqslant\varepsilon$. 这就证明了 $x(t)\in V[a,b]$，且 $\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty)$.

7. 由 $X\neq\{0\}$，则 $\exists\ x_0\neq 0$，$x_0\in X$，如果离散距离 d 由范数 $\|\cdot\|$ 导出，则有

$$d(0,x_0)=\|x_0-0\|=\|x_0\|=1\qquad x_0\neq 0$$

$$d(0,2x_0)=\|2x_0-0\|=2\|x_0\|=1\qquad 2x_0\neq 0$$

故 $2\|x_0\|=1=\|x_0\|$，则 $\|x_0\|=0$，即 $x_0=0$，矛盾.

8. l^∞ 的完备性. 设 $x^{(k)}$ 是 l^∞ 中的基本列，其中 $x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)},\cdots)$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，当 $k,l>K$ 时，有 $\|x^{(k)}-x^{(l)}\|=\sup_{n\geqslant1}|x_n^{(k)}-x_n^{(l)}|<\varepsilon$，故对每个 n，都有 $x_n^{(k)}\to x_n$；又因对每个 n，当 $k,l>K$ 时，有 $|x_n^{(k)}-x_n^{(l)}|<\varepsilon$，固定 $k>K$，令 $l\to+\infty$，有 $|x_n^{(k)}-x_n|\leqslant\varepsilon(n=1,2,3,\cdots)$，所以 $\|x^{(k)}-x\|\to0(k\to\infty)$，且 $\|x\|\leqslant\|x^{(k)}\|+\varepsilon$，即 $x\in l^\infty$，完备性得证.

l^∞ 的不可分性. 记 $M=\{(x_i)\mid x_i$ 取 0 或 1$\}$，易知 M 是不可数(此时 M 与二进制小数集是对等的)，且 $x,y\in M$，当 $x\neq y$ 时，$\|x-y\|=1$. 若 l^∞ 可分，则存在点列 $\{y^{(k)}\}$，在 l^∞ 中稠密. 取 $\frac13$ 为半径作开球 $O\left(y^{(k)},\frac13\right)$，$\forall x\in M\subset l^\infty$，$\exists k_0$，使 $x\in O\left(y^{(k_0)},\frac13\right)$，由于 M 不可数，$O\left(y^{(k)},\frac13\right)$ 可数，故至少有一个 $O\left(y^{(k)},\frac13\right)$ 中含有 M 的两个点 $x,y(x\neq y)$，而 $\|x-y\|=\|x-y^{(k)}+y^{(k)}-y\|\leqslant\|x-y^{(k)}\|+\|y^{(k)}-y\|<\frac13+\frac13=\frac23$，而 $\|x-y\|=1$. 矛盾，故 l^∞ 不可分.

9. 设 $\{s_n\}$ 是 X 中任意 Cauchy 列，对于每个 k，存在 n_k，使得当 $m,n>n_k$ 时，$\|s_m-s_n\|<\frac{1}{2^k}$，选 $n_{k+1}>n_k$，则 $\{s_{n_k}\}$ 是 $\{s_n\}$ 的子序列. 令 $x_1=s_{n_1}$，$x_2=s_{n_2}-s_{n_1}$，…，$x_k=s_{n_k}-s_{n_{k-1}}$，那么 $s_{n_k}=\sum_{j=1}^k x_j$，并且

$$\sum_{j=1}^\infty\|x_j\|\leqslant\|x_1\|+\|x_2\|+\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^k}=\|x_1\|+\|x_2\|+1$$

于是 $\sum_{k=1}^\infty x_k$ 绝对收敛，根据假设 $\sum_{k=1}^\infty x_k$ 收敛，即 $s_{n_k}\to s\in X$. 因为 $\{s_n\}$ 是 Cauchy 列，有 $\|s_n-s\|\leqslant\|s_n-s_{n_k}\|+\|s_{n_k}-s\|\to0$，因此，$s_n\to s$，故 X 是完备的.

10. 设 $\sum_{k=1}^\infty x_k$ 绝对收敛. 令 $s_n=\sum_{k=1}^n x_k$，$m>n$ 时，那么

$$\|s_m-s_n\|=\|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_m\|\leqslant\sum_{k=n+1}^\infty\|x_k\|$$

即 $\{s_n\}$ 是 Cauchy 序列.

12. 因 $|x_j|^2\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j|^2$，于是

$$\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_2\leqslant\sqrt{n}\|x\|_\infty$$

13. $x_1^2+x_2^2=1$ 紧，$x_2=x_1$ 非紧.

14. 由于 $\mathbf{R}^1$，$\mathbf{C}^1$，$\mathbf{R}^n$，$\mathbf{C}^n$ 都是有限维线性赋范空间，由定理 3.2.4 知，这些空间中的以任何点为中心的单位球都是该点的紧邻域.

15. 因 $\|x\|=\|y\|$，则 $(x,x)=(y,y)$，由于 X 是实空间，故 $(x,y)=(y,x)$，于是

$$(x+y,x-y)=(x,x)+(y,x)-(x,y)-(y,y)=0$$

$X=\mathbf{R}^2$ 时，这表示：若平行四边形两邻边相等，则对角线相互垂直.

当 X 是复空间时，有 $\mathrm{Re}(x+y,x-y)=0$.

16. 因 $(x,u)=(x,v)$，则 $(x,u-v)=0$，特取 $x=u-v$，则 $\|u-v\|^2=(u-v,u-v)=0$，故 $u=v$

17. $$\begin{aligned}\|x_n-x\|^2&=(x_n-x,x_n-x)\\&=\|x_n\|^2-(x_n,x)-(x,x_n)+\|x\|^2\\&\to 2\|x\|^2-2(x,x)=0\qquad n\to\infty\end{aligned}$$

18. 若 $x\perp y$，则

$$\begin{aligned}\|x+\alpha y\|^2&=(x+\alpha y,x+\alpha y)\\&=(x,x)+\bar{\alpha}(x,y)+\alpha(y,x)+|\alpha|^2(y,y)\\&=\|x\|^2+|\alpha|^2\|y\|^2\geqslant\|x\|^2\end{aligned}$$

若 $\|x+\alpha y\|\geqslant\|x\|$，且 $y\neq 0$，取 $\alpha=-\dfrac{(x,y)}{\|y\|^2}$，于是

$$\begin{aligned}0&\leqslant(x+\alpha y,x+\alpha y)-\|x\|^2\\&=\bar{\alpha}(x,y)+\alpha(y,x)+|\alpha|^2\|y\|^2\\&=-|(x,y)|^2\|y\|^{-2}\leqslant 0\end{aligned}$$

因此，$(x,y)=0$，即 $x\perp y$

19.
$$Y_1^\perp=\{x\in l^2\mid x_{2n-1}=0,\ n=1,2,3,\cdots\}$$
$$Y_2^\perp=\{x\in l^2\mid x_j=0,\ j=1,2,\cdots,n\}$$

20. (1) $x\in B^\perp\Rightarrow x\perp B$，又 $A\subset B\Rightarrow x\perp A$，$x\in A^\perp$，$B^\perp\subset A^\perp$；

(2) $x\in A\Rightarrow x\perp A^\perp\Rightarrow x\in(A^\perp)^\perp\Rightarrow A\subset(A^\perp)^\perp$. 由(1)$\Rightarrow A^\perp\supset((A^\perp)^\perp)^\perp$. 再由 $A\subset(A^\perp)^\perp\Rightarrow A^\perp\subset((A^\perp)^\perp)^\perp$. 故 $A^\perp=((A^\perp)^\perp)^\perp$.

21. 若 $x\in M$，$y\in N$，则

$$\begin{aligned}(x,y)&=\int_{-1}^{1}x(t)y(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}[-x(-t)y(-t)]\,\mathrm{d}t\\&=\int_{1}^{-1}x(t)y(t)\,\mathrm{d}t=-\int_{-1}^{1}x(t)y(t)\,\mathrm{d}t=-(x,y)\end{aligned}$$

从而 $(x,y)=0$，故 $M\perp N$.

对 $x\in C[-1,1]$，令 $x_1(t)=\dfrac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$，$x_2(t)=\dfrac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$，则 $x_1\in M$，$x_2\in N$. 有 $x=x_1+x_2$，从而 $C[-1,1]=M\oplus N$.

22. 由归纳法可直接验证得 $H_n'(t)=2nH_{n-1}(t)$，易见 $H_0=1$，$H_1=2t$，$\cdots$，一般地，H_n 是 n 次多项式，$n>m$ 时，

$$(\psi_n,\psi_m)=\int_{-\infty}^{+\infty}(2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}H_n(t)(2^m m!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}H_m(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= (2^{n+m} n!\, m!\, \pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_m(t)\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_m(t)\, dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(t) \frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n} dt$$

$$= (-1)^{n-1} 2m \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(t) \frac{d^{n-1} e^{-t^2}}{dt^{n-1}} dt$$

$$\cdots$$

$$= (-1)^{n-m} 2^m m! \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(t) \frac{d^{n-m} e^{-t^2}}{dt^{n-m}} dt$$

$$= \begin{cases} 0 & n > m \\ 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = 2^n n! \sqrt{\pi} & n = m \end{cases}$$

23. $\Leftarrow$ 若 x 可以表示成 $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$，即级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$ 收敛，令 $x_n = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \in Y$，则 $x_n \to x (n \to \infty)$，故 $x \in \bar{Y}$.

$\Rightarrow$ 设 $x \in \bar{Y}$，$\tilde{x} = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$，则 $\tilde{x} \in \bar{Y}$，于是 $v = x - \tilde{x} \in \bar{Y}$，因此

$$(v, x_m) = \left(x - \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k,\ e_m \right)$$
$$= (x, e_m) - (x, e_m) = 0$$

即 $v \perp e_m$，$m=1, 2, 3, \cdots$，从而 $v \perp \bar{Y}$，$v \perp v$（因 $v \in \bar{Y}$），$v=0$，所以 $x = \tilde{x}$.

24. 如果 $f_0 \in H$，$f_0 \neq 0$，$f_0 \perp f_n (n=1, 2, 3, \cdots)$，今证明将会导出矛盾. 取自然数 N，使得 $\sum_{k=N+1}^{\infty} \| e_k - f_k \|^2 < 1$. 令 $g_k = \sum_{j=1}^{N} (f_k, e_j) e_j$，$k = 0, 1, 2, \cdots, N$. $\{g_k\}$ 是 N 维空间中的 $N+1$ 个元，所以必线性相关，即存在不全为零的 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_N$，使 $\sum_{k=0}^{N} \alpha_k g_k = 0$. 此即

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k f_k,\ e_j \right) e_j = 0$$

由 e_j，$j=1, 2, \cdots, N$，线性无关，则

$$\left(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k f_k,\ e_j \right) = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, N$$

若记 $h = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k f_k$，使有 $h \perp e_j (j=1, 2, \cdots, N)$. 又显然 $h \perp f_j (j=N+1, N+2, \cdots)$，于是

$$\| h \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} | (h, e_i) |^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty} | (h, e_i) |^2$$
$$= \sum_{i=N+1}^{\infty} | (h, e_i) - (h, f_i) |^2$$

$$\leqslant \|h\|^2 \sum_{i=N+1}^{\infty} \|e_i - f_i\|^2 < \|h\|^2$$

这是矛盾，即这样的 f_0 不存在，则 $\{f_n\}$ 是完全的.

26. 参看定理 3.4.6.

习 题 四

1. 按定义验证线性. $|f(x)| \leqslant N\|x\|$，其中 $N=\int_a^b |y(t)|\,\mathrm{d}t$；$|g(x)| \leqslant M\|x\|$，其中 $M=|\alpha|+|\beta|$.

2. f 是有界的，且 $\|f\|=1$.

3. 对 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$，$|f(\boldsymbol{x})|=|\alpha x_1+\beta x_2| \leqslant \min(|\alpha|, |\beta|)\|\boldsymbol{x}\|$，故 $\|f\| \leqslant \max(|\alpha|, |\beta|)$.

取 $\boldsymbol{x}=(\operatorname{sgn}\alpha, 0)$，则 $\|\boldsymbol{x}\|=1$，$f(\boldsymbol{x})=|\alpha|$，故 $\|f\| \geqslant \alpha$；同理可证 $\|f\| \geqslant |\beta|$，故 $\|f\| \geqslant \max(|\alpha|, |\beta|)$. 于是 $\|f\|=\max(|\alpha|, |\beta|)$.

4. 仅验证三角不等式

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \max_{t\in J}|x(t)+y(t)| + \max_{t\in J}|x'(t)+y'(t)| \\ &\leqslant \max_{t\in J}|x(t)| + \max_{t\in J}|y(t)| + \max_{t\in J}|x'(t)| + \max_{t\in J}|y'(t)| \\ &= \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

显见 f 是线性泛函，在 $C^1[a, b]$ 上，有

$$|f(x)| = |x'(c)| \leqslant \max_{t\in J}|x(t)| + \max_{t\in J}|x'(t)| = \|x\|$$

即 f 在 $C^1[a, b]$ 上有界，且 $\|f\| \leqslant 1$.

对每一个 n，取 $x_n(t)=\frac{1}{n}\sin\frac{2n(t-a)}{b-a}\pi$，则 $\|x_n\|=\frac{1}{n}$，$x_n \in C[a, b]$.

$$\|x_n'(c)\| = \left|\frac{2\pi}{b-c}\cos n\pi\right| = \frac{2\pi}{b-c}$$

于是有

$$\sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} \geqslant \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} = \frac{|x_n'(c)|}{\|x_n\|} \geqslant \frac{2\pi n}{b-a}$$

故 f 在 $C[a, b]$ 上无界.

5. 验证 f 是 $C[a, b]$ 上的线性泛函从略.

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|\sum_{j=0}^{n} a_j x(t_j)\right| \leqslant \sum_{j=0}^{n}|a_j||x(t_j)| \leqslant \max_{t\in[a,b]}|x(t)|\sum_{j=0}^{n}|a_j| \\ &= \|x\|\sum_{j=0}^{n}|a_j|\end{aligned}$$

故 $\|f\| \leqslant \sum_{j=0}^{n}|a_j|$.

取 $x(t)\in C[a, b]$，且 $|x(t)| \leqslant 1$，及 $x(t_j)=\operatorname{sgn} a_j$，则

$$|f(x)| = \left|\sum_{j=0}^{n} a_j x(t_j)\right| = \sum_{j=0}^{n} |a_j|$$

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \geq \sum_{j=0}^{n} |a_j|$$

所以 $\|f\| = \sum_{j=0}^{n} |a_j|$.

6. 因为$|f(x)|=|(x,z)|\leq\|x\|\|z\|$，所以$\|f\|\leq\|z\|$. 当$z=\theta$时，$\|f\|=\|z\|=0$；当$z\neq\theta$时，则$\|f\|\|z\|\geq|f(z)|=(z,z)=\|z\|^2$，$\|f\|\geq\|z\|$，即$\|f\|=\|z\|$.

7. 对$(f_1,f_2)\in X_1^*\times X_2^*$，定义$(f_1,f_2)(x_1,x_2)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$，直接验证可知$(f_1,f_2)$是$X_1\times X_2$上的线性泛函. 对$(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$，

$$\begin{aligned}|(f_1,f_2)(x_1,x_2)| &\leq |f_1(x_1)|+|f_2(x_2)| \leq \|f_1\|\|x_1\|+\|f_2\|\|x_2\| \\ &\leq \max(\|f_1\|,\|f_2\|)(\|x_1\|+\|x_2\|)\end{aligned}$$

故$(f_1,f_2)\in(X_1\times X_2)^*$，且$\|(f_1,f_2)\|\leq\max(\|f_1\|,\|f_2\|)$，即$X_1^*\times X_2^*\subset(X_1\times X_2)^*$.

反之，对任何$f\in(X_1\times X_2)^*$，记$f_1(x_1)=f(x_1,0)$，则$|f_1(x_1)|\leq\|f\|\|x_1\|$，故$f_1\in X_1^*$. 同样，若令$f_2(x_2)=f(0,x_2)$，则$f_2\in X_2^*$. 易见$f=(f_1,f_2)\in X_1^*\times X_2^*$，即$(X_1^*\times X_2^*)\subset X_1^*\times X_2^*$. 因此，$(X_1\times X_2)^*=X_1^*\times X_2^*$.

若$\max(\|f_1\|,\|f_2\|)=\|f_1\|$，取$\{x_1^{(n)}\}\subset X_1$，$\|x_1^{(n)}\|=1$，使得$f_1(x_1^{(n)})\to\|f_1\|$ $(n\to\infty)$. 于是，$\|(x_1^{(n)},0)\|=1$，而且$n\to\infty$时，

$$(f_1,f_2)(x_1^{(n)},0)=f_1(x_1^{(n)})\to\|f_1\|$$

故$\|(f_1,f_2)\|\geq\|f_1\|=\max(\|f_1\|,\|f_2\|)$. 同理，若$\max(\|f_1\|,\|f_2\|)=\|f_2\|$时，也有$\|(f_1,f_2)\|\geq\max(\|f_1\|,\|f_2\|)$. 所以$\|f_1,f_2\|=\max(\|f_1\|,\|f_2\|)$.

8. 由于$x_0\in X-N(f)$，所以$f(x_0)\neq0$，$\forall x\in X$，取$\alpha=\dfrac{f(x)}{f(x_0)}$，$y=x-\alpha x_0$，则$f(y)=f(x)-\alpha f(x_0)=f(x)-\dfrac{f(x)}{f(x_0)}f(x_0)=0$，即$x$可以表示为

$$x=\alpha x_0+y \qquad y\in N(f)$$

若$\alpha_1x_0+y_1=\alpha x_0+y$，则$y_1-y=(\alpha-\alpha_1)x_0$. 由于$y_1-y\in N(f)$，故$(\alpha-\alpha_1)f(x_0)=f(y_1-y)=0$，因$f(x_0)\neq0$，于是$\alpha_1=\alpha$，$y_1=y$. 故$x$的表达式唯一.

9. $\|f\|=\sum_{k=1}^{n}|f(e_k)|$. 设$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是$X$的一个基，$\forall x\in X$，有$x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k$，且

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right| \leq \max|\xi_i|\sum_{k=1}^{n}|f(e_k)| \\ &= \sum_{k=1}^{n}|f(e_k)|\,\|x\|\end{aligned}$$

于是$\|f\|\leq\sum_{k=1}^{n}|f(e_k)|$；取$x_0=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{(0)}e_j$，$\xi_j^{(0)}=\mathrm{sgn}\,f(e_j)$，则$\|x_0\|=1$，$\xi_j^{(0)}f(e_j)$

$= | f(e_j) |$. 因此，$f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} | f(e_j) | \| x_0 \|$，即 $\| f \| \geqslant \sum_{j=1}^{n} | f(e_j) |$.

10. 因 $X \neq \{0\}$，故 $\exists\, x_0 \in X$，$x_0 \neq 0$，由推论 4.2.1，$\exists\, f_0 \in X^*$，$\| f_0 \| = 1$，$f_0(x_0) = \| x_0 \|$，显然 $f_0 \neq 0$.

11. 当 $\| x_0 \| \neq 0$ 时，$\exists\, f_0 \in X^*$，使 $\| f_0 \| = 1$，$f(x_0) = \| x_0 \|$，令 $\tilde{f} = \dfrac{f_0}{\| x_0 \|}$即可.

12. 利用推论 4.2.1 及题 10 的结论.

13. 设 $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$，取 $a_i = x_i^{(0)} / \| \boldsymbol{x}_0 \|$，$i = 1, 2$，于是 $f_0(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2$. $\| f_0 \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1$，且 $f_0(\boldsymbol{x}_0) = \| \boldsymbol{x}_0 \|$.

14. 若 $X \neq Y$，则存在 $x_0 \in X - Y$，由 Y 的闭性可知 $d(x_0, Y) > 0$，由推论 4.2.2 知存在 $f \in X^*$，使 $f|_Y = 0$，$f(x_0) = d(x_0, Y) > 0$，且 $\| f \| = 1$，这与条件 $f|_y = 0$ 时 $f = 0$ 相矛盾.

15. 若 T 有界，则 T 连续，$\forall\, x_0 \in (N(T))'$，则 $\exists\, x_n \in N(T)$，使 $x_n \to x_0$，则 $Tx_0 = \lim\limits_{n \to \infty} Tx_n = 0$，即 $x_0 \in N(T)$，故 $N(T)$ 闭.

反之不真. 例如，取 $X = C^1[a, b]$，$Y = C[a, b]$，$Tx = x'(t)$，则 $T: X \to Y$ 线性，若 $Tx = 0$，则 $x(t) = C$，$N(T) = \{ x | x(t) = C \in \mathbf{R}^1 \}$ 闭集，但 T 是无界算子.

16. T 线性显然. $\| Tx \| = \| y \| = \sup\limits_{n \geqslant 1} \left\{ \dfrac{| x_n |}{n} \right\} \leqslant \sup\limits_{n \geqslant 1} \{ | x_n | \} = \| x \|$. 所以 T 是有界线性算子，且 $\| T \| \leqslant 1$. 特取 $x_0 = (1, 0, 0, \cdots, 0, \cdots) \in l^\infty$，

$$Tx_0 = y_0 = (1, 0, 0, \cdots, 0, 0, \cdots) \in l^\infty \qquad \| x_0 \| = 1$$
$$\| T \| = \sup_{\| x \| = 1} \| Tx \| \geqslant \| Tx_0 \| = \| y_0 \| = 1$$

所 $\| T \| = 1$.

17. $$\| A \| = \sup_{\| x \| = 1} \| Ax \| = \sup_{\| x \| = 1} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leqslant \sup_{\| x \| = 1} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | | x_j |$$
$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \sup_{\| x \| = 1} \| x \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$$

取 $x_j^{(i)} = \operatorname{sgn} a_{ij}$，则 $\| x^{(i)} \| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} | x_j^{(i)} | = 1$，

$$\| A \| \geqslant \| Ax^{(1)} \|$$
$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \operatorname{sgn} a_{ij} \right| \geqslant \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$$

同理，$\| A \| \geqslant \sum_{j=1}^{n} | a_{nj} |$，所以 $\| A \| \geqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$. 故 $\| A \| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$.

18. 不可交换. $\| T_1 \| = 1$，$\| T_2 \| = 1$，$\| T_1 T_2 \| = \dfrac{1}{2}$，$\| T_2 T_1 \| = 1$. $\| T_1 x \| = \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant 1} \left| s \int_0^1 x(\tau) \, \mathrm{d}\tau \right| \leqslant \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant 1} | s \| x \| | = \| x \|$，则有 $\| T_1 \| \leqslant 1$. 特取 $x_0(t) \equiv 1$，则 $\| T_1 \| \geqslant \| T_1 x_0 \| = \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant 1} | s | = 1$，故 $\| T_1 \| = 1$.

$\| T_2 x \| = \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant 1} | s x(s) | \leqslant \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant 1} | s | \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant 1} | x(s) | = \| x \|$，$\| T_2 \| \leqslant 1$. 特取 $x_0(t) \equiv 1$，则 $\| T_2 \| \geqslant \| T_2 x_0 \| = \max\limits_{1 \leqslant s \leqslant 1} | s | = 1$，故 $\| T_2 \| = 1$.

$$\|T_1T_2x\| = \|T_1(T_2x)\| = \|T_1(sx(s))\| = \max_{0\leqslant s\leqslant 1}\left|s\int_0^1 \tau x(\tau)\mathrm{d}\tau\right|$$
$$\leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant 1}\left|s\int_0^1 \|x\|\tau\mathrm{d}\tau\right| = \max_{0\leqslant s\leqslant 1}\left|\frac{1}{2}s\|x\|\right| = \frac{1}{2}\|x\|$$
故 $\|T_1T_2\|\leqslant\frac{1}{2}$.

特取 $x_0(t)\equiv 1$，则 $\|T_1T_2\|\geqslant\|T_1T_2x_0\|=\frac{1}{2}$，故 $\|T_1T_2\|=\frac{1}{2}$.

$\|T_2T_1x\| = \|T_2(T_1x)\| = \|T_2\left(s\int_0^1 x(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\| = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}\left|s^2\int_0^1 x(\tau)\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\|x\|$，$\|T_2T_1\|\leqslant 1$. 特取 $x_0(t)\equiv 1$，有 $\|T_2T_1\|\geqslant\|T_2T_1x_0\|=\max\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}|s^2|=1$. 所以 $\|T_2T_1\|=1$.

19. 设 M 是给定的闭球并置于球 $\bar{B}=\{x|\|x\|\leqslant R\}$ 之中，因 $T_n\to T$，那么，对于 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，有 $\|T_n-T\|<\varepsilon/R$，故 $\forall x\in\bar{B}$，有
$$\|T_nx-Tx\|\leqslant\|T_n-T\|\|x\|<\frac{\varepsilon}{R}\cdot R=\varepsilon$$

20. 设由 $Tx=0$ 推得 $x=0$，则可证明 T 是 $D(T)$ 到 $R(T)$ 上的单射，故 T^{-1} 存在. 反之，若 T^{-1} 存在，则由 $Tx_1=Tx_2$ 可推得 $x_1=x_2$，由此可知若 $Tx=\theta$，则 $x=\theta$.

21. 由 $\|Tx\|\geqslant b\|x\|$ 可知，若 $Tx=0$，则 $x=0$，故 $T^{-1}: X_2\to X_1$ 存在. 令 $y=Tx$，则 $\|y\|=\|Tx\|=\|T(T^{-1}y)\|\geqslant b\|T^{-1}(y)\|$，故 $\|T^{-1}(y)\|\leqslant\frac{1}{b}\|y\|$.

22. 设 $\{x^{(n)}\}\subset l^2$，$x, y\in l^2$，$x^{(n)}\to x$，$Tx^{(n)}\to y(n\to\infty)$，今证明 $Tx=y$. 设 $x^{(n)}=(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_i^{(n)}, \cdots)$，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_i, \cdots)$，对任何固定的 i，
$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j-y_i\right|\leqslant\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}(x_j^{(n)}-x_j)\right|+\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j^{(n)}-y_i\right|$$
$$\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(n)}-x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j^{(n)}-y_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x^{(n)}-x\|+\|Tx^{(n)}-y\|\to 0\qquad n\to\infty$$
因此，$y_i=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j(i=1, 2, 3, \cdots)$，即 $Tx=y$. 这说明 T 是定义于整个 l^2 上的闭算子，由闭图象定理知，T 是连续的.

23. 考虑恒等算子 $I: (C[0, 1], \|\cdot\|)\to(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$，显然 I 建立了 $(C[0, 1], \|\cdot\|)$ 与 $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ 的一一对应，设 $\{x_n\}\subset C[0, 1]$，$x, y\in C[0, 1]$，使
$$\|x_n-x\|\to 0,\ \|Ix_n-y\|\to 0$$
由条件可知
$$|x(t)-y(t)|\leqslant|x(t)-x_n(t)|+|x_n(t)-y(t)|$$
$$\leqslant\|x_n-x\|+|x_n(t)-y(t)|\to 0\qquad n\to\infty$$
其中 $t\in[0, 1]$. 所以 $x=y$，即 $Ix=y$. 这说明 I 是闭算子，从而 I 是有界算子. 再由逆算

子定理知 T^{-1} 也是有界算子，从而 $\forall\ x\in C[a, b]$，有

$$\|x\|_1 \leqslant \|T\|\ \|x\|, \quad \|x\| \leqslant \|T^{-1}\|\ \|x\|_1$$

即 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1$ 等价.

24. $\forall\ h\in X_2^*$，令 $f(x)=h(Tx)$，$x\in X_1$，则 $|f(x)|=|h(Tx)|\leqslant\|h\|\ \|Tx\|\leqslant\|h\|\ \|T\|\ \|x\|$，故 $f\in X_1^*$. 因 $x_n\xrightarrow{\text{弱}}x_0$，故 $f(x_n)\to f(x_0)$，即 $h(Tx_n)\to h(Tx_0)$，由 $h\in X_2^*$ 的任意性知，$Tx_n\xrightarrow{\text{弱}}Tx_0$.

25. 设存在 $y\in X$，$x_n\xrightarrow{\text{弱}}y$，$y\neq x$，由泛函延拓定理知，存在 $f_0\in X^*$，$\|f_0\|=1$，$f_0(x-y)=\|x-y\|\neq0$，即 $f_0(x)-f_0(y)=\|x-y\|\neq0$，而

$$0\neq\|x-y\|=f_0(x)-f_0(y)=\lim_{n\to\infty}[f_0(x_n)-f_0(x_n)]=0$$

矛盾.

26. 设 $x_n\xrightarrow{\text{弱}}x$，则 $\forall\ f\in X^*$，$f(x_n)$ 收敛，故存在常数 $C_f>0$，使 $\forall\ n$，$|f(x_n)|\leqslant C_f$（C_f 依赖于 f，不依赖于 n）. 作自然映射 $J: X\to X^{**}$，$J: x_n\to g_n\in X^{**}$. 由 $g_n(f)=f(x_n)$，定义 X^* 的有界线性泛函 g_n，有

$$|g_n(f)|=|f(x_n)|\leqslant C_f$$

即 $\forall\ f\in X^*$，$\{g_n(f)\}$ 是有界的，由 X^* 完备的，据共鸣定理知 $\{\|g_n\|\}$ 是有界的，从而 $\{\|x_n\|\}=\{\|g_n\|\}$ 有界.

27. 设 $T_n\to T(n\to\infty)$，当 $\|x\|=1$ 时，有

$$\|T_nx-Tx\|\leqslant\|T_n-T\|\ \|x\|=\|T_n-T\|\to0 \qquad n\to\infty$$

可得：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当 $n>N$ 时，有 $\|T_nx-Tx\|<\varepsilon$，$\forall\ x\in X$，$\|x\|=1$，均成立.

反过来，若 $\forall\ y\in X$，$\|y\|=1$，当 $n>N$ 时，有 $\|T_ny-Ty\|<\varepsilon$，则 $\forall\ x\in X(x\neq0)$，令 $y=x/\|x\|$，则 $\|y\|=1$，

$$\|T_nx-Tx\|=\|T_ny-Ty\|\ \|x\|<\varepsilon\|x\|$$

因此，当 $n>N$ 时，有 $\|T_nx-Tx\|<\varepsilon$

28. 令

$$F_n=(a_1, a_2, \cdots, a_n, 0, \cdots)\in l^2=(l^2)^*$$

$$F_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$$

由条件，$\forall\ x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in l^2$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$ 收敛，即 $\forall\ x\in l^2$，$\{F_n(x)\}$ 有界. 根据共鸣定理可知 $\{\|F_n\|, n=1, 2, 3, \cdots\}$ 有界，$\exists\ M>0$，$\forall\ n$，有 $\|F_n\|=\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\leqslant M$，从而 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\leqslant M$，$(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)\in l^2$.

29. 因为 $Tx=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)z_i$，所以对任何 $g\in X_2^*$，

$$g(Tx)=g\left(\sum_{i=1}^{n}f_i(x)z_i\right)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)g(z_i)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}g(z_i)f_i\right)(x)$$

但 $g(Tx)=T^* g(x)$，故 $T^* g(x)=\left(\sum_{i=1}^{n} g(z_i) f_i\right)(x)$. 此式对一切 x 成立，故 $T^* g=\sum_{i=1}^{n} g(z_i) f_i$.

30. 当 $Tx=x$ 时，$(T^* x, x)=(x, Tx)=(x, x)=(Tx, x)=(x, T^* x)=\|x\|^2$，所以，

$$\begin{aligned}\|T^* x-x\|^2 &= \|T^* x\|^2+\|x\|^2-(T^* x, x)-(x, T^* x)\\ &= \|T^* x\|^2-\|x\|^2 \leqslant \|T^*\|^2\|x\|^2-\|x\|^2\\ &= \|T\|^2\|x\|^2-\|x\|^2 \leqslant 0 \qquad \text{因为 } \|T\| \leqslant 1\end{aligned}$$

故 $T^* x=x$. 即 $\{x \mid Tx=x\} \subset \{x \mid T^* x=x\} \subset \{x \mid T^{**} x=x\}=\{x \mid Tx=x\}$，从而 $\{x \mid Tx=x\}=\{x \mid T^* x=x\}$.

习 题 五

1. 利用不等式

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n| &= |f(x_n)-f(x_{n-1})|\\ &= \max|f'(x)||x_n-x_{n-1}| \leqslant \alpha|x_n-x_{n-1}|\end{aligned}$$

2. 由 Lagrange 中值定理

$$|Ax-Ay|=\left|1-\frac{1}{\xi^2}\right||x-y|<|x-y|$$

ξ 在 x 与 y 之间，方程 $Ax=x$ 在 X 上无解，因此映射 A 没有不动点.

3. 由于 $g'(x)=1-\lambda f'(x)$，$0<k_1 \leqslant f'(x) \leqslant k_2$，取 $\lambda=\frac{1}{2k_2}$ 时，

$$\frac{1}{2} \leqslant g'(x) \leqslant 1-\frac{k_1}{2k_2}<1$$

由微分中值定理，有

$$|g(x)-g(y)|=|g'(\xi)||(x-y)| \leqslant \left(1-\frac{k_1}{2k_2}\right)|x-y|$$

即 g 是压缩映射，故 $x_{n+1}=g(x_n)$ 收敛于 g 的唯一不动点 x^*，则 x^* 即是 $f(x)=0$ 的唯一解.

4. 因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，故存在 N，当 $n \geqslant N$ 时，有 $a_n \leqslant \frac{1}{2}$，即 $\forall x, y \in X$，有 $\frac{d(A^n x, A^n y)}{d(x, y)} \leqslant \frac{1}{2}$，即 $d(A^n x, A^n y) \leqslant \frac{1}{2} d(x, y)$，由推论 5.1.2 知，$A$ 在 X 中有唯一不动点.

5. 先证 A 是压缩映射. 即存在 $\alpha \in (0, 1)$，使 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in F$，有

$$d(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) \leqslant \alpha d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{1}$$

若不然，$\forall n$，有 $\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n \in F$，使

$$d(A\boldsymbol{x}_n, A\boldsymbol{y}_n)>\left(1-\frac{1}{n}\right) d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n) \tag{2}$$

由于 F 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集，故 F 是紧集，从而存在$\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$，$\{\boldsymbol{y}_{n_k}\}$及 $\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{y}_0 \in F$，$\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{y}_{n_k} \to \boldsymbol{x}_0$，在(2)式中，换 $\boldsymbol{x}_n$，$\boldsymbol{y}_n$ 分别为 $\boldsymbol{x}_{n_k}$，$\boldsymbol{y}_{n_k}$，再令 $k \to \infty$，有

$$d(A\boldsymbol{x}_0, A\boldsymbol{y}_0) = \lim_{k\to\infty} d(A\boldsymbol{x}_{n_k}, A\boldsymbol{y}_{n_k}) \geqslant \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{n_k}\right) d(\boldsymbol{x}_{n_k}, \boldsymbol{y}_{n_k}) = d(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$$

这与题设相矛盾，故(1)式成立．由压缩映象原理知，存在唯一不动点，$\boldsymbol{x}^* \in F$，有

$$A\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^*$$

6．作 A：$l^\infty \to l^\infty$，故 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^\infty$，令 $Ax=((Ax)_1, (Ax)_2, \cdots, (Ax)_n, \cdots)$，其中 $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j + b_i (i=1, 2, 3, \cdots)$．对 x，$y \in l^\infty$，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)$，有

$$\begin{aligned}\| Ax - Ay \| &= \sup_i |(Ax)_i - (Ay)_i| = \sup_i \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(x_j - y_j) \right| \\ &\leqslant \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \cdot \sup_j |x_j - y_j| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \, \| x - y \|\end{aligned}$$

由条件知 A 是 l^∞ 上的压缩映射，从而 A 在 l^∞ 上有唯一不动点，即原方程有唯一解．

7．因 $f(x^*)=0$，由中值定理，有

$$|f(x)| = |f(x) - f(x^*)| = |f'(\xi)| \, |x - x^*| \leqslant k_1 |x - x^*|$$

因 x^* 是单重零点，故在 x^* 的某闭邻域 O 上有 $f'(x) \neq 0$，$O \subset [a, b]$，$f''(x)$ 在 O 上有界，并且 $\forall x \in O$，

$$|g'(x)| = \frac{|f(x) f''(x)|}{[f'(x)]^2} \leqslant k_2 |f(x)| \leqslant k_1 k_2 |x - x^*| < \frac{1}{2}$$

当 $|x - x^*| < \frac{1}{2k_1k_2}$ 时成立．

8．利用迭代公式(5.1－27)有

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v(t) + \mu \int_0^1 \mathrm{e}^{t-\tau} v(\tau)\, \mathrm{d}\tau = v(t) + \mu \mathrm{e}^t \int_0^1 \mathrm{e}^{-\tau} v(\tau)\, \mathrm{d}\tau \\ &= v(t) + \mu k_0 \mathrm{e}^t \end{aligned}$$

其中令
$$k_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\tau} v(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

$$x_2(t) = v(t) + \mu \int_0^1 \mathrm{e}^{t-\tau} x_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau = v(t) + \mu k_0 \mathrm{e}^t (1+\mu)$$

$$x_3(t) = v(t) + \mu \int_0^1 \mathrm{e}^{t-\tau} x_2(\tau)\, d\tau = v(t) + \mu k_0 \mathrm{e}^t (1+\mu+\mu^2)$$

$$\cdots$$

$$x_n(t) = v(t) + \mu k_0 \mathrm{e}(1+\mu+\mu^2+\cdots+\mu^{n-1})$$

由 $|\mu| < 1$，则有

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = v(t) + \frac{\mu}{1-\mu} k_0 \mathrm{e}^t$$

9．令 $a = d(x, y) = \inf_{y \in Y} d(x, y)$，$f(y) = d(x, y)$，$y \in Y$，则 $f(y)$ 在紧集 Y 上连续，从而 $f(y)$ 在 Y 上取得最小值，即存在 $y_0 \in Y$，使 $a = d(x, y_0)$，y_0 就是 x 在 Y 中的最佳逼近．

10. 令 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，$\mu=1-\lambda$，对于 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，$\beta=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$. 由于 $x=\lambda x+\mu x$，有

$$\begin{aligned} f(\lambda\alpha+\mu\beta) &= \| x-\sum_{j=1}^{n}(\lambda\alpha_j+\mu\beta_j)e_j \| \\ &\leqslant \lambda\| x-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j \| + \mu\| x-\sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j \| \\ &= \lambda f(\alpha)+\mu f(\beta) \end{aligned}$$

即 f 是凸函数.

11. 对 $\lambda\in(0, 1)$，$\| x\| = \| y\| =1$，若 $\|\cdot\|$ 严格凸，有：

当 $\lambda\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，

$$\begin{aligned} \| \lambda x+(1-\lambda)y\| &= \| 2\lambda\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)+(1-2\lambda)y\| \\ &\leqslant 2\lambda\| \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\| +(1-2\lambda)\| y\| < 2\lambda+(1-2\lambda)=1; \end{aligned}$$

当 $\lambda>\dfrac{1}{2}$ 时，

$$\begin{aligned} \| \lambda x+(1-\lambda)y\| &= \| 2(1-\lambda)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)+(1-2(1-\lambda))x\| \\ &\leqslant 2(1-\lambda)\| \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\| +(1-2(1-\lambda))\| x\| \\ &< 2(1-\lambda)+(1-2(1-\lambda))=1 \end{aligned}$$

故对任何 $\lambda\in(0, 1)$，有 $\| \lambda x+(1-\lambda)y\| <1$. 反之显然成立.

12. (1) 当 Y 看作 $C[0, 1]$ 的子空间时，由于对任何两点 $t_1, t_2\in[0, 1]$，$t_1\neq t_2$ 时，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{vmatrix} = (t_2+t_1)(t_2-t_1)\neq 0$$

由引理 5.3.2 知 Y 满足 Haar 条件.

(2) 当 Y 看作 $C[-1, 1]$ 的子空间时，对 $t_1, t_2\in[-1, 1]$，$t_2=-t_1$，则(1)中行列式为零，因此，Y 不满足 Haar 条件.

13. 由于 v_j 是(5.3-4)式中行列式中第 j 个列向量，$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 线性无关，因此(5.3-4)式中的行列式不等于零，于是可证 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 线性无关，Y 是 n 维子空间. 对 Y 的每一个基 $\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ 可唯一地表示为

$$z_j = \alpha_{j1}y_1+\alpha_{j2}y_2+\cdots+\alpha_{jn}y_n \qquad j=1, 2, \cdots, n$$

因 $\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ 线性无关，可得

$$D=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

对任意 n 个 $t_j\in[a, b]$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，有

$$
\begin{vmatrix}
z_1(t_1) & z_1(t_2) & \cdots & z_1(t_n)\\
z_2(t_1) & z_2(t_2) & \cdots & z_2(t_n)\\
\cdots & \cdots & & \cdots\\
z_n(t_1) & z_n(t_2) & \cdots & z_n(t_n)
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\
\cdots & \cdots & & \cdots\\
\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}
\end{vmatrix}\cdot
\begin{vmatrix}
y_1(t_1) & y_1(t_2) & \cdots & y_1(t_n)\\
y_2(t_1) & y_2(t_2) & \cdots & y_2(t_n)\\
\cdots & \cdots & & \cdots\\
y_n(t_1) & y_n(t_2) & \cdots & y_n(t_n)
\end{vmatrix}\neq 0
$$

由引理 5.3.2 知 Y满足 Haar 条件.

反之，由 $Y=\operatorname{span}\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，$\dim Y=n$可得$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$是 Y的一组基，再由引理 5.3.2，对任意 n个不同的 $t_j\in[a, b]$($j=1, 2, \cdots, n$)，以

$$v_j=(y_1(t_j), y_2(t_j), \cdots, y_n(t_j))\qquad j=1, 2, \cdots, n$$

作为列向量的行列式(5.3-4)不等于零，由此，$v_1, v_2, \cdots, v_n$线性无关.

14. 由推论 5.3.3 的公式(5.3-17)，$x(t)=t^3$ 的二次多项式最佳逼近为

$$y_0(t)=t^3+t^2-\frac{1}{4}T_3(t)=t^2+\frac{3}{4}t$$

其最大偏差为 $\|x-y_0\|=\dfrac{1}{4}$.

15. 因为 $G(x, y)=\|x\|^2\|y\|^2-|(x, y)|^2$，Schwarz 不等式等价于 $G(x, y)\geqslant 0$，由引理 5.3.5 知，等号成立充要条件是 x与 y线性相关.

16. 当 $n=1$ 时，$G(y_1)=\|y_1\|^2\geqslant 0$，设对自然数 k，有 $G(y_1, y_2, \cdots, y_k)\geqslant 0$，则由定理 5.3.5 的(5.3-31)引式得

$$G(y_1, y_2, \cdots, y_{k+1})=\|z\|^2 G(y_1, y_2, \cdots, y_k)\geqslant 0$$

这里 $z=x-x_0$，x_0 是 x在 $Y=\operatorname{span}(y_1, y_2, \cdots, y_k)$中的最佳逼近，因此对自然数 n，有 $G(y_1, y_2, \cdots, y_n)\geqslant 0$. 由定理 5.3.5 知$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$线性无关时，$G(y_1, y_2, \cdots, y_n)>0$.

习 题 六

1. $\sigma_p(I)=\sigma(I)=\{1\}$. 由$(1-\lambda)Ix=0$ 对应的特征空间为 X. $R_\lambda(I)=(1-\lambda)^{-1}I$，对 $\lambda\neq 1$ 是有界线性算子.

2. T的不变子空间为 $X_n=\operatorname{span}\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$($n=1, 2, 3, \cdots$)，对任何 λ，由$(T-\lambda I)x=\theta$，可得 $x=\theta$，故 T无特征值.

3. 因 λ是 T^n 的特征值，所以 $\lambda I-T$的零空间不为$\{0\}$，设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$\lambda$的 n个 n次方根，则

$$\lambda I-T^n=(\lambda_1 I-T)(\lambda_2 I-T)\cdots(\lambda_n I-T)$$

所以至少存在某 i_0，使 $\lambda_{i_0}I-T$的零空间不为$\{0\}$，故 $\mu=\lambda_{i_0}$即为 T的特征值.

4. 设 $\lambda\in[0, 1]$，$(\lambda-1)^{-1}$是$[0, 1]$上的有界连续函数，而乘以$(\lambda-1)^{-1}$的乘法算子恰

好是$(\lambda I-T)^{-1}$，故$\lambda\in\rho(T)$.

设$\lambda\in[0,1]$，由$[(\lambda I-T)x](t)=(\lambda-t)x(t)=0$，可知$t=\lambda$时，$(\lambda-t)x(t)=0$，$(\lambda-t)x(t)$的全体组成的集合在$C[0,1]$中不稠密. 所以$\lambda$不是连续谱. 不难证明，$\lambda\in[0,1]$不可能是$T$的特征值. 事实上，若存在$x_0(t)\in C[0,1]$，使$(\lambda I-T)x_0(t)=(\lambda-t)x_0(t)=0$，则当$t\neq\lambda$时，$x_0(t)=0$，由$x_0(t)$连续可知$x_0(t_0)=0$，因此对一切$t\in[0,1]$，$x_0(t)=0$，即$(\lambda I-T)x(t)=0$没有非零解，故$\lambda$不是特征值. 综上所述，$\lambda\in[0,1]$只能是$T$的剩余谱.

5. 提示：作法同题4，$\sigma(T)=y(t)$的值域(有界闭区间).

6. 提示：应用题5，作$Tx=yx$，其中$y=y(t)=a+(b-a)t$.

7. 因$f\in X^*$，故T是线性算子. 再由$\|Tx\|=|f(x)|\|z\|\leqslant\|f\|\|x\|\|z\|$知$T\in B(X\to X)$，再注意到$R(T)\subset\mathrm{span}\{z\}$是$X$的一维子空间，故$T$是全连续算子.

8. 令$T_nx=\left(\dfrac{x_2}{1},\dfrac{x_3}{2},\cdots,\dfrac{x_{n+1}}{n},0,0,\cdots\right)$，$x\in(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^2$，则$T_n$是值域为有限维的线性有界算子，由于

$$\|(T-T_n)x\|^2=\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}|x_{j+1}|^2\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{j=n+1}^{\infty}|x_{j+1}|^2\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}\|x\|^2$$

因此$\|T-T_n\|\leqslant\dfrac{1}{(n+1)}\to 0\ (n\to\infty)$，故$T$全连续.

若$\lambda=0$，则$x_0=(1,0,0,\cdots)$是相应的特征元，则$\lambda=0\in\sigma_p(T)$.

若$\lambda\neq0$，由$Tx=\lambda x$得$x_{n+1}=n!\lambda^n x_1$，由$x\in l^2$知，$x_1=0$，因而$x=0$，即$\lambda\in\sigma_p(T)$.

9. 设$(T\varphi)(s)=\int_0^1 e^{s+t}\varphi(t)\,dt=\lambda\varphi(s)$，即有$e^s\int_0^1 e^t\varphi(t)\,dt=\lambda\varphi(s)$，记$\int_0^1 e^t\varphi(t)\,dt=c$，则$ce^s=\lambda\varphi(s)$，故$\varphi(s)=\dfrac{c}{\lambda}e^s$. 从而

$$c=\int_0^1 e^s\varphi(s)\,ds=\frac{c}{\lambda}\int_0^1 e^{2s}\,ds=\frac{c}{2\lambda}(e^2-1)$$

则$\lambda=\dfrac{1}{2}(e^2-1)$，对应特征函数为$x(t)=e^t$.

10. 设$\int_0^{\pi}\cos(s+t)\varphi(t)\,dt=\lambda\varphi(s)$，两边关于$s$求导数，有

$$\lambda\varphi'(s)=-\int_0^{\pi}\sin(s+t)\varphi(t)\,dt$$

$$\lambda\varphi''(s)=-\int_0^{\pi}\cos(s+t)\varphi(t)\,dt$$

则有

$$\varphi''(s)+\varphi(s)=0 \qquad (*)$$

方程$(*)$有两个线性无关解，$\varphi_1(s)=\cos s$，$\varphi_2(s)=\sin s$. 将$\varphi_1(s)$代入特征方程可得$\lambda_1=\pi/2$，将$\varphi_2(s)$代入可得$\lambda_2=-\pi/2$.

11. 令$(K\varphi)(s)=2\int_0^{\pi}\cos(s+t)\varphi(t)\,dt$，由题10可知，特征值$\lambda_1=\pi$对应特征函数$x_1=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos s$，$\lambda_2=-\pi$对应特征函数$x_2=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin s$，$(1,x_1)=\int_0^{\pi}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos t\,dt=0$，(1，

$x_2) = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin t \, \mathrm{d} t = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}$，由(6.2−15)式得

$$\varphi(s) = 1 + \sum_{i=1}^{2}{}' \frac{(1, x_i)}{1-\lambda_i} \lambda_i x_i = 1 + \frac{1}{1+\pi} \cdot 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot (-\pi) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin s$$

$$= 1 - \frac{4}{1+\pi} \sin s$$

12. $\varphi(s) = \frac{9}{7} s - 2$.

习　题　七

1. 设 $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots)$，$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}, \cdots) \in X$.

$$F(x^{(n)}) = \sum_{|x_k^{(n)}| \geqslant 1}{}' (|x_k^{(n)}| - 1) k$$

$$F(x^{(0)}) = \sum_{|x_k^{(0)}| \geqslant 1}{}' (|x_k^{(0)}| - 1) k$$

因为 $x^{(n)} \to x^{(0)}$，而 l^2 中按范数收敛蕴涵一致依坐标收敛，又因 $F(x^{(0)})$仅对有限项求和，因而 $F(x^{(n)}) \to F(x^{(0)})$，即 F在 X上连续.

下证 F无界. 任取 $\varepsilon_0 > 0$，令 $x_k^{(n)} = (1+\varepsilon_0)\delta_{nk}$，$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots) \in l^2$，其中

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

则 $x^{(n)} \in \bar{B}(\theta, 1+\varepsilon_0) = \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1+\varepsilon_0\}$，而

$$F(x^{(n)}) = n\varepsilon_0 \to +\infty \qquad n \to \infty$$

故 F在 X上无界.

2. $[f'(x_0)] h(t) = h'(t) + 2 x_0 h(t)$

3. 对 $h \in C[a, b]$，

$$T(x_0 + h) - T x_0 = \int_a^b K(t, s) g(s, x_0(s) + h(s)) \, \mathrm{d} s$$

$$- \int_a^b K(t, s) g(s, x_0(s)) \, \mathrm{d} s$$

$$= \int_a^b K(t, s) [g(s, x_0(s) + h(s)) - g(s, x_0(s))] \, \mathrm{d} s$$

$$\xlongequal{\text{中值定理}} \int_a^b K(t, s) g_u'(s, x_0(s) + \theta(s) h(s)) \, \mathrm{d} s$$

$$= \int_a^b K(t, s) g_u'(s, x_0(s)) h(s) \, \mathrm{d} s$$

$$+ \int_a^b K(t, s) \omega(s, x_0(s), \theta(s) h(s)) h(s) \, \mathrm{d} s$$

$$= F'(x_0) h + \omega(x_0 + h)$$

其中

$$F'(x_0)h=\int_a^b K(t,s)g_u'(s,x_0(s))h(s)\,\mathrm{d}s$$

$$\|\omega(x_0,h)\|=o(\|h\|)$$

4. $\forall h\in X$，有

$$\begin{aligned}\varphi(x+h)-\varphi(x)&=(A(x+h),x+h)-(Ax,x)\\&=(Ax+Ah,x+h)-(Ax,x)\\&=(Ax,h)+(Ah,x)+(Ah,h)\\&=(Ax,h)+(A^*x,h)+(Ah,h)\\&=((A+A^*)x,h)+(Ah,h)\\&=\varphi'(x)h+\omega(x,h)\end{aligned}$$

其中，$\varphi'(x)x=((A+A^*)x,h)$，$\|\omega(x,h)\|=o(\|h\|)$，故 $\varphi'(x)=(A+A^*)x$

5. 设 $\boldsymbol{A}\in GL(n)$，$\boldsymbol{H}\in M(n\times n)$，取 $\|\boldsymbol{H}\|$ 足够小，使 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{H}\in GL(n)$，且 $\|\boldsymbol{HA}^{-1}\|\leqslant\|\boldsymbol{H}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|<1$，则

$$\begin{aligned}F(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{H})-F(\boldsymbol{A})&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{H})^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\\&=-\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{H})^{-1})=-\boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{I}-((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{H})\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}]\\&=-\boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{HA}^{-1})^{-1}]\\&=-\boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{HA}^{-1}+(\boldsymbol{HA}^{-1})^2-(\boldsymbol{HA}^{-1})^3+\cdots)]\\&=-\boldsymbol{A}^{-1}\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(\boldsymbol{HA}^{-1})^k=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{HA}^{-1}+\omega(M,\boldsymbol{H})\\&=F'(M)\boldsymbol{H}+\omega(M,\boldsymbol{H})\end{aligned}$$

其中，$F'(M)\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{HA}^{-1}$，$\omega(M,\boldsymbol{H})=\boldsymbol{A}^{-1}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k(\boldsymbol{HA}^{-1})^k$.

6. 应用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，(7.3-21)式自然成立，设 $n=k$ 结论成立，即对满足定理条件(n 换成 $k(k<n)$)的函数(7.3-21)式成立. 对于映射 F'，有

$$F'(x+h)=F'(x)+F''(x)h+\frac{1}{2!}F'''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}F^{(k)}(x)h^{k-1}+\omega_k(x,h^{n-1})$$

其中，$\|\omega_k(x,h^{n-1})\|=o(\|h\|^{n-1})$. 将上式在$[x,x+h]$上积分，有

$$\begin{aligned}F(x+h)-F(x)&=\int_0^1 F'(x+th)h\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\Big[F'(x)+tF''(x)h+\frac{1}{2!}t^2F'''(x)h^2+\cdots\\&\quad+\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}F^{(k)}(x)h^{k-1}\Big]h\,\mathrm{d}t+\omega\\&=F'(x)h+\frac{1}{2!}F''(x)h^2+\frac{1}{3!}F'''(x)h+\cdots\\&\quad+\frac{1}{k!}F^{(k)}(x)h^k+\omega\end{aligned}$$

其中，$\omega_k=\int_0^1\omega_{k-1}(x,(th)^{k-1})h\,\mathrm{d}t$，而由 $\|\omega_{k-1}(x,h^{k-1})\|=o(\|h\|^{k-1})$，得

$$\| \omega_k \| \leqslant \int_0^1 \| \omega_{k-1}(x, (th)^{k-1}) \| \, \| h \| \, \mathrm{d}t = o(\| h \|^k)$$

由归纳法，有

$$F(x+h) = F(x) + F'(x)h + \frac{1}{2!}F''(x)h^2 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}F^{(n)}(x)h^n + o(x, h^n)$$

7.
$$g(x, x', t) = (x')^2 - 2x\cos t$$

$$g'_x = 2\cos t, \quad g''_{x'x} = 0, \quad g''_{x'x'} = 2, \quad g''_{x't} = 0$$

其欧拉—拉格朗日方程为：$x'' + \cos t = 0$，其通解为 $x = c_1 x + c_2 + \cos t$，代入边界条件，得 $c_1 = \frac{2}{\pi}$，$c_2 = -1$，则极值曲线为

$$y = \frac{2}{\pi}x - 1 + \cos t$$

8. 旋转曲面面积为

$$S = J[y] = 2\pi \int_{AB} y \, \mathrm{d}s = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + (y')^2} \, \mathrm{d}x$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

欧拉—拉格朗日方程(由(7.5－9)式)为

$$y\sqrt{1+(y')^2} - y' \cdot y \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = c_1 \quad \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = c_1$$

令 $y' = \operatorname{sh} t$，代入上式，得 $y = c_1 \operatorname{ch} t$. 由于

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y'} = \frac{c_1 \operatorname{sh} t \, \mathrm{d}t}{\operatorname{sh} t} = c_1 \, \mathrm{d}t$$

积分得 $x = c_1 t + c_2$，于是，所求曲线为

$$\begin{cases} x = c_1 t + c_2 \\ y = c_1 \operatorname{ch} t \end{cases}$$

消去参数 t 得

$$y = c_1 \operatorname{ch} \frac{x - c_2}{c_1}$$

c_1、c_2 由边界条件来确定.

参考文献

[1] 夏道行等编著. 实变函数论与泛函分析. 北京：人民教育出版社，1979

[2] 胡适耕编著. 泛函分析. 北京：高等教育出版社，2001

[3] 张恭庆等编著. 泛函分析讲义(上册). 北京：北京大学出版社，1987

[4] 李大华编著. 应用泛函简明教程. 武汉：华中理工大学出版社，1999

[5] 刘树琪等编译. 泛函分析入门及题解. 天津：天津科学技术出版社，1988

[6] 徐利治等编著. 函数逼近的理论与方法. 上海：上海科学技术出版社，1983

[7] 不动点理论及其应用. 王渥缨等译. 上海：上海科学技术文献出版社，1991

[8] 严绍宗等编著. 实度函数与泛函分析. 北京：经济科学出版社，1992

[9] 王长清编. 近代解析应用数学基础. 西安：西安电子科技大学出版社，2001

[10] 龚怀云等. 应用泛函分析. 西安：西安交通大学出版社，1985

[11] 郭大钧等编. 实变函数与泛函分析. 济南：山东大学出版社，1986

[12] 王声望等. 实变函数与泛函分析概要(第二册). 第二版. 北京：高等教育出版社，1992

[13] 关肇直等著. 线性泛函分析入门. 上海：上海科学技术出版社，1979

[14] [美]D.G.鲁恩伯杰著. 最优化的矢量空间方法. 蒋正新等译. 北京：国防工业出版社，1987

[15] 许天周编著. 应用泛函分析. 北京：科学出版社，2002